Байдин О. В., канд. техн. наук, докторант,
Редькин Г. М., д-р техн. наук, проф.
Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова

ВЛИЯНИЕ НЕРАВНОВЕСНЫХ ПРОЦЕССОВ СИЛОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ НА ПОТЕРИ ОБЖАТИЯ ПРИ ПОВЫШЕНИИ ТРЕЩИНОСТОЙКОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА*

Oleg.v31@yandex.ru

Приведена расчетная оценка потерь предварительного напряжения при повышении трещиностойкости поврежденных коррозией изгибаемых железобетонных элементов.

***Ключевые слова**: силовое сопротивление, коррозионные повреждения, обжатие, напряжения.*

Целью настоящих исследований является построение расчетной оценки изменения во времени напряжений обжатия, в изгибаемых железобетонных элементах поврежденных коррозией, с учетом неравновесных процессов силового сопротивления железобетона [3, 4]. В работах [1, 2] повышение трещиностойкости осуществляется за счет обжатия его растянутой части сечения, где получено разрешающее интегральное уравнение (1):

$$\sigma_к(t_0)L_0 - \Delta\sigma_к(t)L_0 + \int_{t_0}^{t}\Delta\sigma_к(\tau)\frac{d}{d\tau}L_1(\tau)d\tau = 0\,, \tag{1}$$

где:

$$L_0 = \left[\frac{1}{E_{к,мг}} + C_к(t,t_0)\right] - \frac{A_к}{A_{жб}}\left[\frac{1}{E^*_{жб}} + C^*_{жб}(t,t_0)\right], \tag{2}$$

$$L_1 = C_к(t,t_0) + \frac{A_к}{A_{жб}}C^*_{жб}(t,t_0)\,, \tag{3}$$

$$C_к(t,t_0) = C_{кр}\left[1 - \beta e^{-\gamma(t-t_0)}\right], \tag{4}$$

$$C^*_{жб}(t,t_0) = C^*_{кр}\left[1 - \beta^* e^{-\gamma^*(t-t_0)}\right]. \tag{5}$$

Заметим, что в формулах (2)–(5) и далее по тексту, значок «*» (звездочка) относящийся к различным параметрам, характеризует поврежденный коррозией материал, в нашем случае это относится к железобетону, а арматура (канат) не поврежден.

Выражение (1) необходимо для вычисления изменяющихся во времени напряжений обжатия в канате $\Delta\sigma_к(t)$, т.е. определении потерь уровня обжатия железобетонного элемента поврежденного коррозией для обеспечения заданной трещиностойкости эксплуатируемых конструкций.

Ниже приведем решение (1) в интегральной форме.

Сначала уравнение (1) продифференцируем по t и получим линейное неоднородное первого порядка уравнение:

$$\sigma_к(t_0)L_0' - \Delta'\sigma_к(t)L_0 - \Delta\sigma_к(t)L_0' + \Delta\sigma_к(t)L_1' = 0\,, \tag{6}$$

представив его в следующем виде:

$$\Delta'\sigma_к(t) + \frac{L_0' - L_1'}{L_0}\Delta\sigma_к(t) = \sigma_к(t_0)\frac{L_0'}{L_0}\,. \tag{7}$$

Уравнение (7) будем решать методом вариации произвольной постоянной. В этой связи, левую часть уравнения (7) приравняем к нулю и запишем в виде линейного однородного уравнения:

$$\Delta'\sigma_к(t) + \frac{L_0' - L_1'}{L_0}\Delta\sigma_к(t) = 0\,, \tag{8}$$

решая его способом разделения переменных, получим общее решение:

$$\Delta\sigma_к(t) = \frac{c(t)}{L_0}e^{\int\frac{L_1'}{L_0}dt}\,. \tag{9}$$

Таким образом, получено общее решение уравнения (8). Отметим, что в решении (9) произвольную постоянную c представили как функцию от времени t, т.е. $c = c(t)$.

Далее решение (9) подставим в уравнение (7), найдем функцию $c(t)$:

$$c(t) = \sigma_к(t_0)\int L_0' e^{-\int\frac{L_1'}{L_0}dt}dt + c\,. \tag{10}$$

Затем решение (10) подставим в решение (9), получим:

$$\Delta\sigma_к(t) = \frac{1}{L_0}\left[\sigma_к(t_0)\int L_0' e^{-\int\frac{L_1'}{L_0}dt}dt + c\right]e^{\int\frac{L_1'}{L_0}dt}\,, \tag{11}$$

где под неопределенным интегралом понимают конкретную первообразную, которую получим при переменном верхнем пределе t и, следовательно, формулу (11) представим следующем виде:

$$\Delta\sigma_{к}(t)=\frac{1}{L_0}\left[\sigma_{к}(t_0)\int_{t_0}^{t}L_0'e^{-\int_{t_0}^{\tau}\frac{L_1'}{L_0}dx}d\tau+c\right]e^{\int_{t_0}^{t}\frac{L_1'}{L_0}d\tau}. \quad (12)$$

Т.е., получено в интегральной форме общее решение (12) уравнения (7).

Далее, для удобства записи и простоты интегрирования показателей степени в решении (12), введем следующие обозначения (замены):

$$a=C_{кр}\beta, \quad (13)$$

$$b=\frac{A_{к}}{A_{жб}}C_{кр}^{*}\beta^{*}, \quad (14)$$

$$r=\frac{1}{E_{к,мг}}+C_{кр}-\frac{A_{к}}{A_{жб}}\left[\frac{1}{E_{жб}^{*}}+C_{кр}^{*}\right]. \quad (15)$$

Следовательно, запишем (2), (3) с учетом (13)–(15) в следующем виде:

$$L_0=r-ae^{-\gamma(t-t_0)}+be^{-\gamma^{*}(t-t_0)}, \quad (16)$$

$$L_1=\frac{a}{\beta}-ae^{-\gamma(t-t_0)}+\frac{b}{\beta^{*}}-be^{-\gamma^{*}(t-t_0)}, \quad (17)$$

и найдем их производные:

$$L_0'=a\gamma e^{-\gamma(t-t_0)}-b\gamma^{*}e^{-\gamma^{*}(t-t_0)}, \quad (18)$$

$$L_1'=a\gamma e^{-\gamma(t-t_0)}+b\gamma^{*}e^{-\gamma^{*}(t-t_0)}, \quad (19)$$

Найдем частное решение уравнения (7), удовлетворяющее начальным условиям:

$$t=t_0,\ \Delta\sigma_{к}(t)=\Delta\sigma_{к}(t_0), \quad (20)$$

с учетом общего решения (12) получим:

$$\Delta\sigma_{к}(t_0)=\frac{1}{L_0(t_0)}c, \quad (21)$$

откуда выразим произвольную постоянную c с учетом (16) запишем:

$$c=L_0(t_0)\Delta\sigma_{к}(t_0), \quad (22)$$

где $L_0(t_0)$ с учетом (16) и (20) запишем в следующем виде:

$$L_0(t_0)=r-a+b. \quad (23)$$

Затем подставим (22) в общее решение (12) и получим удовлетворяющее начальным условиям (20) частное решение уравнения (7) в интегральной форме:

$$\Delta\sigma_{к}(t)=\frac{1}{L_0}\left[\sigma_{к}(t_0)\int_{t_0}^{t}L_0'e^{-\int_{t_0}^{\tau}\frac{L_1'}{L_0}dx}d\tau+L_0(t_0)\Delta\sigma_{к}(t_0)\right]e^{\int_{t_0}^{t}\frac{L_1'}{L_0}d\tau}. \quad (24)$$

Для выражения частного решения (24) в функциональном виде требуется вычислить следующие три интеграла:

1. Интеграл показателя степени стоящий в решении (24) за скобкой справа:

$$\int_{t_0}^{t}\frac{L_1'}{L_0}d\tau; \quad (25)$$

2. Интеграл показателя степени стоящий в квадратных скобках решения (24):

$$-\int_{t_0}^{\tau}\frac{L_1'}{L_0}dx; \quad (26)$$

3. Интеграл, стоящий в квадратных скобках решения (24):

$$\int_{t_0}^{t}L_0'e^{-\int_{t_0}^{\tau}\frac{L_1'}{L_0}dx}d\tau. \quad (27)$$

Ввиду сложности вычисления интегралов (25)–(27) и при этом громоздкости записи решений, предлагается находить их оценки снизу и сверху, которые дают некоторые упрощения в решениях данных интегралов и, следовательно, приближенное решение (24) в функциональном виде. Таким образом, частное решение (24) удовлетворяет двойному неравенству:

$$\Delta_1\sigma_{к}(t)<\Delta\sigma_{к}(t)<\Delta_2\sigma_{к}(t), \quad (28)$$

где: $\Delta_1\sigma_{к}(t)$ – оценка снизу; $\Delta_2\sigma_{к}(t)$ – оценка сверху.

В целях установления оценок снизу и сверху интегралов (25)–(27) выразим функцию L_0 через функцию L_1 соответственно сложением и вычитанием (16) и (17), получим:

$$L_0=r+\frac{a}{\beta}+\frac{b}{\beta^{*}}-2ae^{-\gamma(t-t_0)}-L_1; \quad (29)$$

$$L_0=L_1+2be^{-\gamma^{*}(t-t_0)}+r-\frac{a}{\beta}-\frac{b}{\beta^{*}}. \quad (30)$$

Далее при $t=t_0$, выражение (29) принимает минимальное, а выражение (30) – максимальное значения. При этом справедливо двойное неравенство:

$$r+\frac{a}{\beta}+\frac{b}{\beta^{*}}-2a-L_1\le L_0\le L_1+2b+r-\frac{a}{\beta}-\frac{b}{\beta^{*}}. \quad (31)$$

Аналогично выражениям функции L_0, приведенным выше, находим выражения её производной L_0' через производную функции L_1' на основе равенств (18) и (19) запишем:

$$L_0' = 2a\gamma e^{-\gamma(t-t_0)} - L_1'; \qquad (32)$$

$$L_0' = L_1' - 2b\gamma^* e^{-\gamma^*(t-t_0)}. \qquad (33)$$

Затем при $t = t_0$ будет верно двойное равенство:

$$L_1' - 2b\gamma^* \le L_0' \le 2a\gamma - L_1'. \qquad (34)$$

Исходя из двойных неравенств (31) и (34) оценим интегралы (25)–(27) снизу:

1. В знаменатель подынтегральной функции L_0 интеграла (25) подставим его максимальное значение (31), затем интегрируем путем подведения функции L_1' под знак дифференциала, получим с учетом (23):

$$\int_{t_0}^{t} \frac{L_1'}{L_0} d\tau \ge \int_{t_0}^{t} \frac{L_1'}{L_1 + 2b + r - \frac{a}{\beta} - \frac{b}{\beta^*}} d\tau = \ln\left|\frac{L_1 + 2b + r - \frac{a}{\beta} - \frac{b}{\beta^*}}{L_0(t_0)}\right|. \qquad (35)$$

В силу основного логарифмического тождества:

$$e^{\ln x} = x, \qquad (36)$$

имеем запись следующего вида:

$$e^{\int_{t_0}^{t} \frac{L_1'}{L_0} d\tau} \ge \frac{L_1 + 2b + r - \frac{a}{\beta} - \frac{b}{\beta^*}}{L_0(t_0)}, \qquad (37)$$

которое используется в готовом виде при решении (24).

2. По аналогии с п.1 применительно к (26) подставляем минимальное значение функции L_0 согласно (31), затем интегрируем тем же методом, получим с учетом (23):

$$-\int_{t_0}^{\tau} \frac{L_1'}{L_0} dx \ge -\int_{t_0}^{\tau} \frac{L_1'}{r + \frac{a}{\beta} + \frac{b}{\beta^*} - 2a - L_1} dx = \ln\left|\frac{r + \frac{a}{\beta} + \frac{b}{\beta^*} - 2a - L_1}{L_0(t_0)}\right|. \qquad (38)$$

Следовательно, с учетом (36) запишем:

$$e^{-\int_{t_0}^{\tau} \frac{L_1'}{L_0} dx} \ge \frac{r + \frac{a}{\beta} + \frac{b}{\beta^*} - 2a - L_1}{L_0(t_0)}. \qquad (39)$$

3. В подынтегральную функцию L_0' интеграла (27) подставим её минимальное значение (34), проинтегрируем путем непосредственного интегрирования и подведения функции L_1' под знак дифференциала с учетом (39) получим:

$$\int_{t_0}^{t} L_0' e^{-\int_{t_0}^{\tau} \frac{L_1'}{L_0} dx} d\tau \ge \int_{t_0}^{t} \left(L_1' - 2b\gamma^*\right) \frac{\left(r + \frac{a}{\beta} + \frac{b}{\beta^*}\right) - L_1}{L_0(t_0)} d\tau =$$

$$= \frac{1}{L_0(t_0)}\left[\left(r + \frac{a}{\beta} + \frac{b}{\beta^*} - 2a\right)\left(L_1 - L_1(t_0)\right) - \frac{1}{2}\left(L_1^2 - L_1^2(t_0)\right) - \right.$$

$$\left. - 2b\gamma^*(r - 2a)(t - t_0) + 2ab\frac{\gamma^*}{\gamma}\left(e^{-\gamma(t-t_0)} - 1\right) + 2b^2\left(e^{-\gamma^*(t-t_0)} - 1\right)\right]. \qquad (40)$$

Таким образом, оценки снизу (35), (38), (40) соответственно интегралов (25), (26), (27) подставим в частное решение (24) и получим его оценку снизу $\Delta_1\sigma_\kappa(t)$ в функциональном виде, с учетом (23):

$$\Delta_1\sigma_\kappa(t) = \frac{L_1 + 2b + r - \frac{a}{\beta} - \frac{b}{\beta^*}}{L_0 L_0(t_0)}\left[\frac{\sigma_\kappa(t_0)}{L_0(t_0)}\left[\left(r + \frac{a}{\beta} + \frac{b}{\beta^*} - 2a\right)\left(L_1 - L_1(t_0)\right) - \frac{1}{2}\left(L_1^2 - L_1^2(t_0)\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2b\gamma^*(r - 2a)(t - t_0) + 2ab\frac{\gamma^*}{\gamma}\left(e^{-\gamma(t-t_0)} - 1\right) + 2b^2\left(e^{-\gamma(t-t_0)} - 1\right)\right] + \Delta\sigma_\kappa(t_0)L_0(t_0)\right]. \qquad (41)$$

Далее, исходя из двойных неравенств (31) и (34) оценим интегралы (25)–(27) сверху:

1. В знаменатель подынтегральной функции L_0 интеграла (25) подставим его минималь-

ное значение (31), затем интегрируем путем подведения функции L_1' под знак дифференциала, получим с учетом (23):

$$\int_{t_0}^{t}\frac{L_1'}{L_0}d\tau \le \int_{t_0}^{t}\frac{L_1'}{r+\frac{a}{\beta}+\frac{b}{\beta^*}-2a-L_1}d\tau = \ln\left|\frac{L_0(t_0)}{r+\frac{a}{\beta}+\frac{b}{\beta^*}-2a-L_1}\right|. \quad (42)$$

Следовательно, с учетом (36) запишем:

$$e^{\int_{t_0}^{t}\frac{L_1'}{L_0}d\tau} \le \frac{L_0(t_0)}{r+\frac{a}{\beta}+\frac{b}{\beta^*}-2a-L_1}, \quad (43)$$

2. По аналогии с п.1 применительно к (26) подставляем максимальное значение функции L_0 согласно (31), затем интегрируем тем же методом, получим с учетом (23):

$$-\int_{t_0}^{\tau}\frac{L_1'}{L_0}dx \le -\int_{t_0}^{\tau}\frac{L_1'}{L_1+2b+r-\frac{a}{\beta}-\frac{b}{\beta^*}}dx = \ln\left|\frac{L_0(t_0)}{L_1+2b+r-\frac{a}{\beta}-\frac{b}{\beta^*}}\right|. \quad (44)$$

Итак, с учетом (36) запишем:

$$e^{-\int_{t_0}^{\tau}\frac{L_1'}{L_0}dx} \le \frac{L_0(t_0)}{L_1+2b+r-\frac{a}{\beta}-\frac{b}{\beta^*}}. \quad (45)$$

3. В подынтегральную функцию L_0' интеграла (27) подставим её максимальное значение (34), проинтегрируем путем непосредственного интегрирования и подведения функции L_1' под знак дифференциала с учетом (45) и (23) получим:

$$\int_{t_0}^{t}L_0'e^{-\int_{t_0}^{\tau}\frac{L_1'}{L_0}dx}d\tau \le \int_{t_0}^{t}\left(2a\gamma-L_1'\right)\frac{L_0(t_0)}{L_1+\left(2b+r-\frac{a}{\beta}-\frac{b}{\beta^*}\right)}d\tau <$$

$$< L_0(t_0)\left[\frac{2a\gamma}{L_0(t_0)}\left(t-t_0\right)+\ln\left|\frac{L_0(t_0)}{L_1+2b+r-\frac{a}{\beta}-\frac{b}{\beta^*}}\right|\right]. \quad (46)$$

Далее, оценки сверху (42), (44), (46) соответственно интегралов (25), (26), (27) подставим в частное решение (24) и получим его оценку сверху $\Delta_2\sigma_\kappa(t)$ в функциональном виде, с учетом (23) запишем:

$$\Delta_2\sigma_\kappa(t) = \frac{L_0^2(t_0)}{L_0\left(r+\frac{a}{\beta}+\frac{b}{\beta^*}-2a-L_1\right)}\left[\sigma_\kappa(t_0)\left(\frac{2a\gamma}{L_0(t_0)}\left(t-t_0\right)+\ln\left|\frac{L_0(t_0)}{L_1+2b+r-\frac{a}{\beta}-\frac{b}{\beta^*}}\right|\right)+\Delta\sigma_\kappa(t_0)\right]. \quad (47)$$

Таким образом, получено решение, которое позволяет учитывать изменение во времени напряжений обжатия при повышении трещиностойкости изгибаемых железобетонных элементов поврежденных коррозией.

**Научный консультант В.М. Бондаренко, д-р техн. наук, профессор, академик РААСН.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Байдин, О.В.* К вопросу повышения трещиностойкости поврежденного коррозией железобетона / О.В. Байдин // Вестник БГТУ им. В. Г. Шухова. – 2012. – № 1. – С. 46 – 49. – ISSN 2071-7318.

2. *Байдин, О.В.* Повышение сопротивления образованию трещин поврежденного коррозией железобетона обжатием / О.В. Байдин // Строительная механика и расчет сооружений. – 2012. – № 2. – ISSN 0039-2383.

3. Бондаренко, В.М. Некоторые вопросы нелинейной теории железобетона / В.М. Бондаренко. – Харьков: Изд-во Харьковского университета, 1968. – 234 с.

4. Бондаренко, В.М. Расчетные модели силового сопротивления железобетона / В.М. Бондаренко, Вл.И. Колчунов. – М.: Изд-во АСВ, 2004. – 472 с.: 182 ил. –ISBN 5-93093-279-4.