

Осипов О. В., аспирант

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова

## ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

ov.osipov@gmail.com

В работе предлагается и обосновывается численный метод решения новой задачи об оптимальном выборе плотности источников тепла для неоднородной среды. Приводятся описание разработанных алгоритмов и результаты численных экспериментов.

**Ключевые слова:** неоднородная среда, плотность источников тепла, обратная задача теплопроводности, функция Грина, конечномерная аппроксимация, симплекс-метод, метод теплового баланса.

В работах [1-3] рассматривалась задача нахождения плотности источников тепла минимальной мощности, которая обеспечивает заданный температурный режим в некоторой области в условиях ее стационарного теплового баланса с окружающей средой. В работе [3] приведены уточненная формулировка задачи, обоснование численного алгоритма ее решения и результаты численных экспериментов. При этом предполагалось, что среда, заполняющая область, является однородной (имеет одинаковый во всех точках коэффициент теплопроводности). В настоящей работе мы отказываемся от этого предположения, рассматривая более общую задачу для неоднородной среды. В первоначальной постановке эта задача в существенном мало отличается от задачи, рассмотренной в [3], однако алгоритмы ее численного решения являются существенно иными и их реализация должна производиться независимо.

Так же как и в [3], в настоящей работе первоначальная формулировка задачи редуцируется к более удобной форме, строится ее конечномерная аппроксимация в виде последовательности задач линейного программирования. По схеме, приведенной в [3] можно установить, что эта последовательность задач обладает особым свойством регулярности по функционалу, которое позволяет считать решение конечномерной задачи с достаточно большим номером, приближенным решением исходной задачи.

В работе приводится описание основанных на построенной аппроксимации вычислительных алгоритмов, их программной реализации и результаты численных экспериментов.

### 1. Постановка задачи оптимального расположения источников тепла в области с неоднородной теплопроводностью и ее конечномерная аппроксимация

Рассматривается  $m$ -мерная замкнутая область  $D \subset R^m$ , заполненная веществом с температурой  $T(\vec{x})$  в каждой точке  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$ . Вещество считается неоднородным и характери-

зуется переменной теплопроводностью  $\chi(\vec{x})$ . В области  $D$  расположены источники тепла с плотностью  $f(\vec{x})$ . Введём функцию  $u(\vec{x}) = T(\vec{x}) - T_0$ , где  $T_0$  – температура окружающей среды, которая считается известной константой.

Первоначальная постановка задачи состоит в следующем. Для области  $D$  с установившимся процессом теплообмена, который описывается уравнением

$$\nabla(\chi \nabla u) + f = 0, \quad (1)$$

и краевым условием

$$\chi \frac{\partial u}{\partial n} + \delta u \Big|_{\partial D} = 0, \quad (2)$$

необходимо построить функцию  $f(\vec{x}) \geq 0$ , доставляющую минимум линейному функционалу

$$J\{f\} = \int_D f(\vec{x}) dV_m \rightarrow \min, \quad (3)$$

при условии

$$m(\vec{x}) - T_0 \leq u(\vec{x}) \leq M(\vec{x}) - T_0, \quad (4)$$

где  $m(\vec{x})$ ,  $M(\vec{x})$  – заданные максимальный и минимальный профили температур,  $\delta(\vec{x})$  – функция теплопередачи через границу среды  $\partial D$ .

Введём для задачи (1) с краевым условием (2) функцию Грина  $G(\vec{x}, \vec{\xi})$ . Тогда условие (4) можно записать в виде:

$$m(\vec{x}) - T_0 \leq \int_{\vec{\xi} \in D} G(\vec{x}, \vec{\xi}) f(\vec{\xi}) dV_m \leq M(\vec{x}) - T_0, \quad (5)$$

$$f(\vec{x}) \geq 0, \quad f(\vec{x}) \in S(D).$$

В оптимизационной задаче (3), (5)  $S(D)$  является классом функций, среди которых разыскивается плотность источников  $f(\vec{x})$ . Ниже в качестве  $S(D)$  берется вещественное гильбертово пространство  $L_2(D)$  квадратично интегрируемых в  $D$  функций.

Построим конечномерную аппроксимацию задачи (3), (5) в виде задачи линейного программирования. Разобьем область  $D$  на  $n$  частей

$\left( D = \bigcup_{j=1}^n D_j \right)$ . Определим подпространство  $S_n(D) \subset S(D)$  кусочно-постоянных функций вида  $f(\bar{x}) = f_j, \bar{x} \in D_j (j=1,2,\dots,n)$ . Введем в  $S_n(D)$  базис, состоящий из функций  $e_j(\bar{x}) = 1, \bar{x} \in D_j$ , и  $e_j(\bar{x}) = 0, \bar{x} \notin D_j$ . Рассмотрим на  $S(D)$  оператор  $Gf = \int_{\bar{\xi} \in D} G(\bar{x}, \bar{\xi}) f(\bar{\xi}) dV_m$ . Введем обозначения  $g_{ij} = (Ge_i, e_j)$ ,  $a_i = (m(\bar{x}) - T_0, e_i(\bar{x}))$ ,  $b_i = (M(\bar{x}) - T_0, e_i(\bar{x}))$ , где  $(\cdot, \cdot)$  – скалярное произведение в  $L_2(D)$ . Получаем конечномерную аппроксимацию задачи (3), (5):

$$G(x, \xi) = \begin{cases} R_{ab} \left( (1+l_a) \int_a^x \frac{dt}{\chi(t)} + (1+l_a) \left( 1 + \beta_2 \int_a^b \frac{dt}{\chi(t)} \right) \int_x^b \frac{dt}{\chi(t)} \right), & \text{при } a \leq \xi \leq x; \\ R_{ab} \left( (1+l_b) \left( 1 + \beta_1 \int_a^b \frac{dt}{\chi(t)} \right) \int_a^x \frac{dt}{\chi(t)} + (1+l_b) \int_x^b \frac{dt}{\chi(t)} \right), & \text{при } x \leq \xi \leq b, \end{cases}$$

где  $R_{ab} = 1 / \left( \left( 1 + \beta_1 \int_a^b \frac{dt}{\chi(t)} \right) \left( 1 + \beta_2 \int_a^b \frac{dt}{\chi(t)} \right) - 1 \right)$ ,  $l_a = \beta_1 \int_a^{\xi} \frac{dt}{\chi(t)}$ ,  $l_b = \beta_2 \int_{\xi}^b \frac{dt}{\chi(t)}$

При  $m > 1$  построение функции Грина весьма затруднительно. Для наших целей нужно знать лишь матрицу с элементами  $g_{ij} = (Ge_i, e_j)$ , определение которой равносильно нахождению решений  $u_i(x)$  уравнений  $\nabla(\chi \nabla u) + e_i = 0$  при краевых условиях (2). Эти решения в дальнейшем находится численно способом, который описан в следующем пункте.

Отметим также, что последовательность конечномерных оптимизационных задач (6) при довольно широких условиях обладает свойством регулярности по функционалу (см. [3]), что позволяет считать ее решение при достаточно

$$\bar{\omega} = \{x_i = (a_1 + i_1 h_1, \dots, a_m + i_m h_m), \vec{i} = (i_1, \dots, i_m), i_\alpha = 0, \dots, N_\alpha, h_\alpha = (b_\alpha - a_\alpha) / N_\alpha\}.$$

Окружим каждый внутренний узел  $x_i (i_\alpha = 1, \dots, N_\alpha - 1)$  элементарным объёмом  $E_i = \{a_\alpha + i_\alpha h_\alpha - h_\alpha / 2 \leq x_\alpha \leq a_\alpha + i_\alpha h_\alpha + h_\alpha / 2\}$ .

Для приграничных узлов  $x_i (i_\alpha = 0, i_\alpha = N_\alpha - 1)$  элементарные объёмы ограничиваются границей области  $D$ , как показано на рис. 1. Для всех  $E_i$  уравнение теплового баланса имеет вид:

$$\sum_{\alpha=1}^m W_i^{\alpha+} + W_i^{\alpha-} + \int_{E_i} f(\bar{x}) dV_m = 0, \quad (7)$$

где  $W_i^{\alpha+}, W_i^{\alpha-}$  – потоки в соседние по пространственному измерению  $\alpha$  элементарные объёмы.

$$J_n(f) = \sum_{j=1}^n (mes D_j) f_j \rightarrow \min, \quad (8)$$

$$a_i \leq \sum_{j=1}^n g_{ij} f_j \leq b_i, \quad f_i \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,n).$$

Для одномерного случая ( $m=1$ ), когда область  $D$  является интервалом  $(a, b)$ , а функция  $\chi(x)$  непрерывна с производными до второго порядка, такая аппроксимация строится легко, т.к. функцию Грина  $G(x, \xi)$  можно построить в явном виде. Краевая задача (3),(5) принимает форму:

$$\frac{d}{dx} \left( \chi(x) \frac{du}{dx} \right) + f(x) = 0, \quad \begin{cases} (du/dx - \beta_1 u)|_{x=a} = 0; \\ (du/dx + \beta_2 u)|_{x=b} = 0, \end{cases} \text{ где}$$

$\beta_1 = \delta_1 / \chi(a) > 0, \beta_2 = \delta_2 / \chi(b) > 0$  – некоторые константы. Функция Грина запишется в виде:

большом  $n$  приближенным решением оптимизационной задачи (3), (5).

## 2. Разностная схема для численного вычисления элементов $g_{ij}$

Для исследования алгоритма решения задачи (3), (5) в многомерном случае построим методом теплового баланса [4] разностную схему для приближённого нахождения функции  $u(\bar{x})$  задачи (1) с произвольной правой частью  $f(\bar{x})$  и краевым условием (2). В качестве области  $D$  возьмём  $m$ -мерный параллелепипед  $(a_\alpha \leq x_\alpha \leq b_\alpha, \alpha = 1, \dots, m)$  с равномерной сеткой

Обозначим  $S_i^\alpha$  – площадь соприкосновения  $E_i$  с соседними по измерению  $\alpha$  элементарными объёмами  $E_{i^{\alpha+}}, \vec{i}^{\alpha+} = (i_1, \dots, i_{\alpha+1}, \dots, i_m)$  и

$E_{i^{\alpha-}}, \vec{i}^{\alpha-} = (i_1, \dots, i_{\alpha-1}, \dots, i_m)$ ,  $y_i$  – сеточное значение искомой функции  $u(\bar{x})$ . Тогда, если  $x_i$  – внутренний узел, то

$$W_i^{\alpha+} = \chi(x_i) S_i^\alpha \frac{y_{i^{\alpha+}} - y_i}{h_\alpha}, \quad W_i^{\alpha-} = \chi(x_i) S_i^\alpha \frac{y_{i^{\alpha-}} - y_i}{h_\alpha}.$$

Если  $x_i$  – приграничный узел и поток направлен по измерению  $\alpha$  во внешнюю среду, то

$W_i^{\alpha+} = -\beta(x_i)S_i^\alpha y_i$ ,  $W_i^{\alpha-} = -\beta(x_i)S_i^\alpha y_i$ , где  $\beta(x_i) = \delta(x_i) / \chi(x_i)$ .

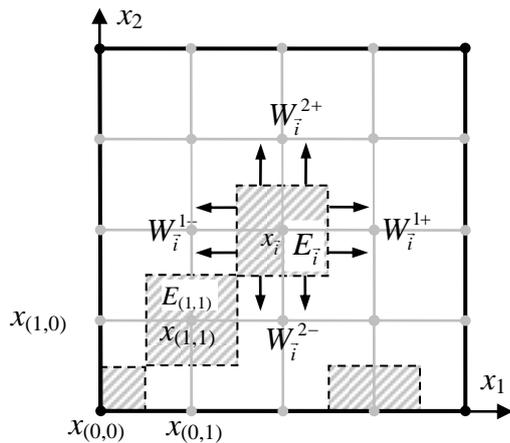


Рис. 1. Разбиение области  $D$  сеткой размером  $4 \times 4$

Подобласти  $D_j$  выберем следующим образом: разрежем область  $D$  по каждому измерению на равные части. Таким образом, получим одинаковые по объёму подобласти, которые образуют также равномерную сетку  $\bar{\omega}_f$ . Сетка  $\bar{\omega}$  должна быть чаще  $\bar{\omega}_f$  по каждому измерению в целое число раз  $\nu$ , чтобы узлы сетки  $\bar{\omega}$  были в точках разрыва функций  $e_j$ .

Составленные для каждого узла  $x_i$  уравнения вида (7), умноженные на  $mesE_i$ , образуют самосопряжённую систему линейных уравнений с  $\prod_{\alpha=1}^m (N_\alpha + 1)$  неизвестными  $y_i$  и  $N$  правыми частями. Решение этой системы даёт набор сеточных функций  $u_j(\bar{x})$  ( $j = 1, \dots, N$ ), каждая из которых является приближённым решением (1), (2) с  $f_j(\bar{x}) = e_j(\bar{x})$ , и можно считать, что  $Ge_j = \int_{\xi \in D} G(\bar{x}, \xi) e_j(\xi) dV_m = \int_{\xi \in D_i} G(x_i, \xi) dV_m \approx u_j(x_i)$

Далее, для вычисления элементов  $g_{ij}$  используется численное интегрирование.

**Замечание 1.** Для улучшения качества результата решения задачи (3), (5) можно выбрать несколько точек  $x_k^*$  ( $k=1, \dots, M$ ), расположенных на границе области  $D$  и к системе (5) добавить несколько ограничений с  $g_{N+k,j} = u_j(x_k^*)$ ,  $a_{N+k} = m(x_k^*) - T_0$ ,  $b_{N+k} = M(x_k^*) - T_0$ .

### 3. Описание алгоритмов и результаты численных экспериментов

Для исследования предложенного алгоритма был создан программный комплекс HeatCore, позволяющий производить расчёт оптимального обогрева  $m$ -мерного параллелепипеда ( $m = 1, 2, 3$ ) с произвольной функцией тепलो-

редачи  $\chi(\bar{x})$ . В одномерном случае ( $m = 1$ ) имеется возможность выбора способа вычисления элементов обменной матрицы  $g_{ij}$ : аналитический (с использованием явного представления функции Грина) и численный (с применением метода теплового баланса). Сравнение обоих способов вычисления  $g_{ij}$  показывает приемлемость применения разностных схем для решения данной задачи. При  $m > 1$  для нахождения  $g_{ij}$  требуется значительное процессорное время и количество памяти для решения методом Гаусса системы линейных уравнений с несколькими правыми частями. На блок-схеме (рис. 2) представлен общий алгоритм решения  $m$ -мерной задачи с использованием численного метода для вычисления  $g_{ij}$ .

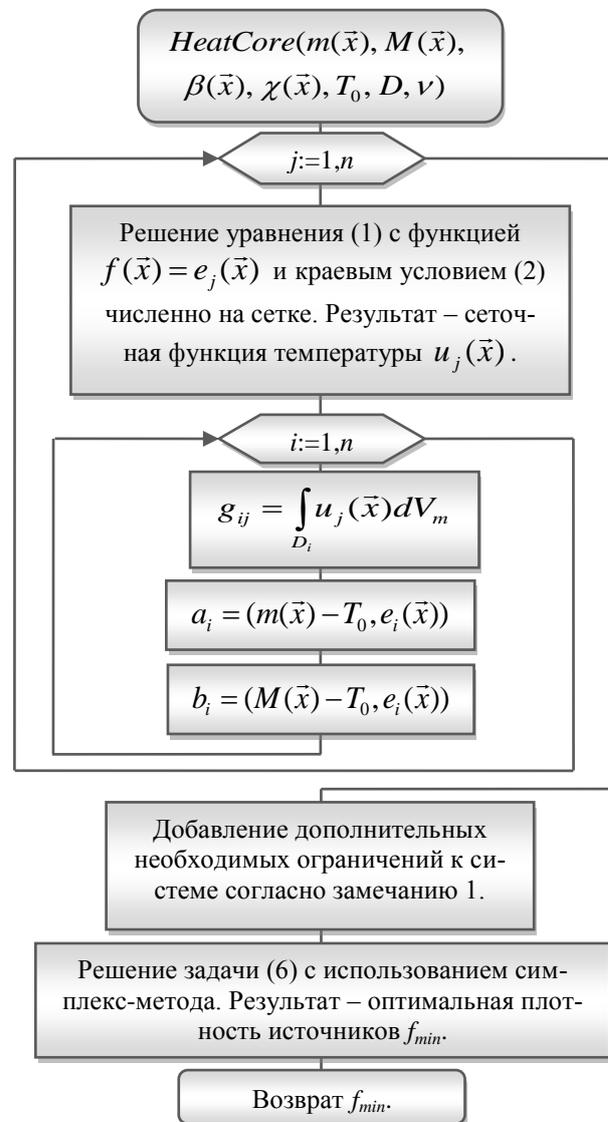


Рис. 2. Блок-схема алгоритма решения  $m$ -мерной задачи

Вычисления показывают, что с ростом  $n$  последовательность  $(J_n)_{min}$  довольно быстро стабилизируется. При этом оптимальная плотность источников имеет несколько отдельных зон локализации возрастающей остроты. На рис. 3 представлен результат численного решения задачи (6) для отрезка ( $m = 1$ ) с  $\chi(x) = (x - 55)^2 / 5 \text{ м}^2/\text{с}$ . Для изображённых здесь результатов решения задачи при аналитическом вычислении  $g_{ij}$ , уже при 3 разбиениях минимум полностью стабилизируется и равен  $J_{min} = 15^\circ\text{К}\cdot\text{м}/\text{с}$ . Отметим, что при численном нахождении этих коэф-

фициентов  $J_{min}$  также оказывается равным 15, независимо от частоты сетки  $\nu$ . Для иллюстрации эффективности разработанного метода на рис. 3 приведено сравнение результатов при выбранном произвольно расположении источников (кривые серого цвета) с найденным методически (чёрного цвета). Оба распределения источников соответствуют одному температурному коридору. Оптимизация распределения источников в данном примере экономит  $(22.4 - 15) / 15 \cdot 100\% \approx 49.3\%$  тепловой энергии.

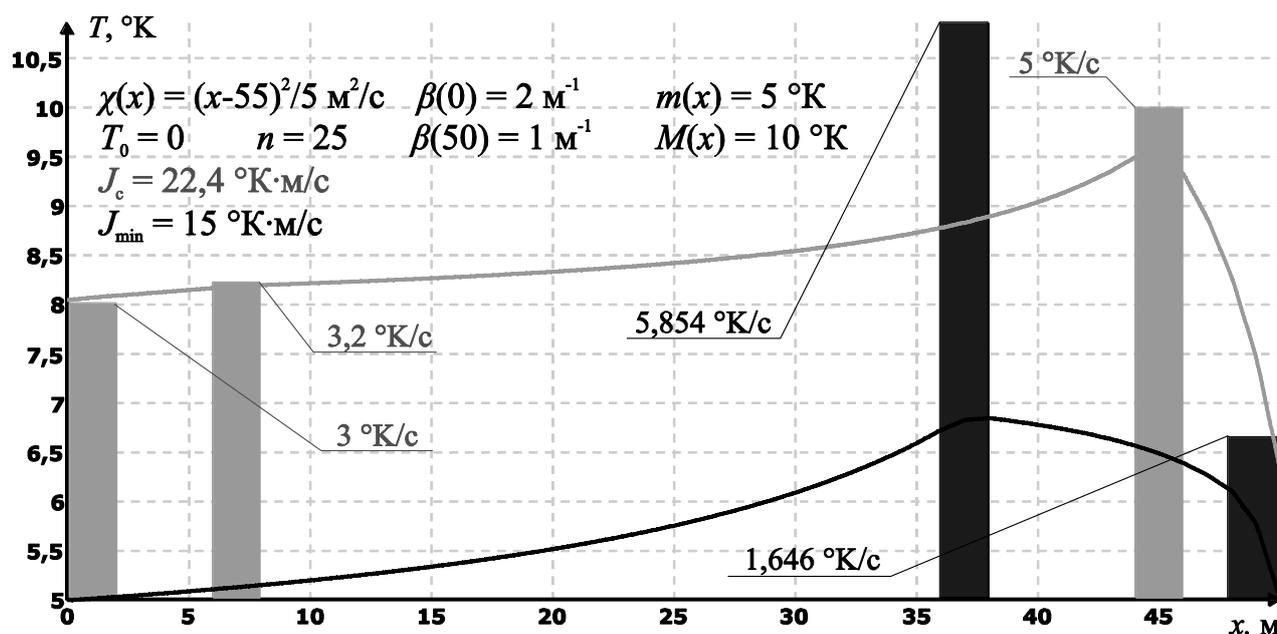
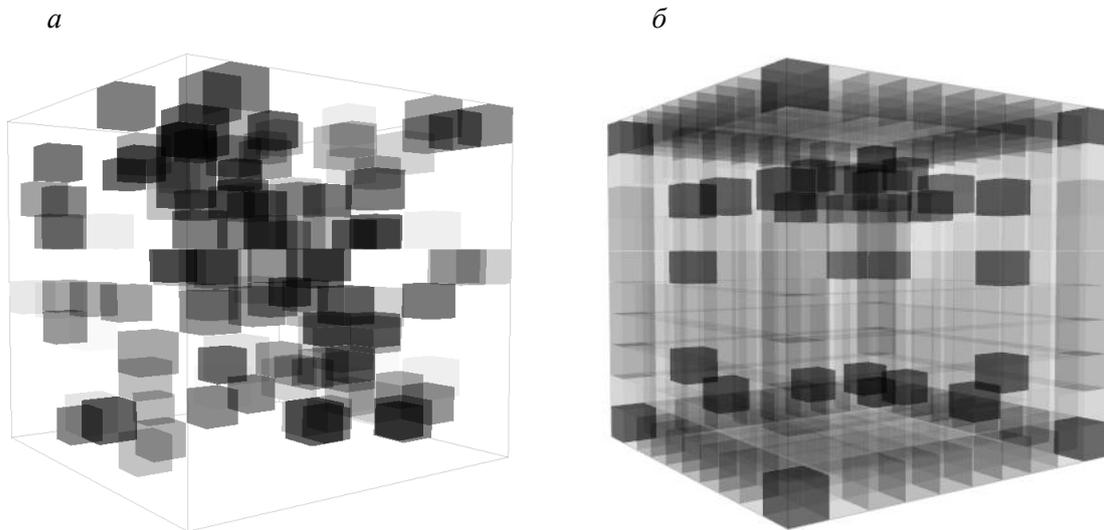
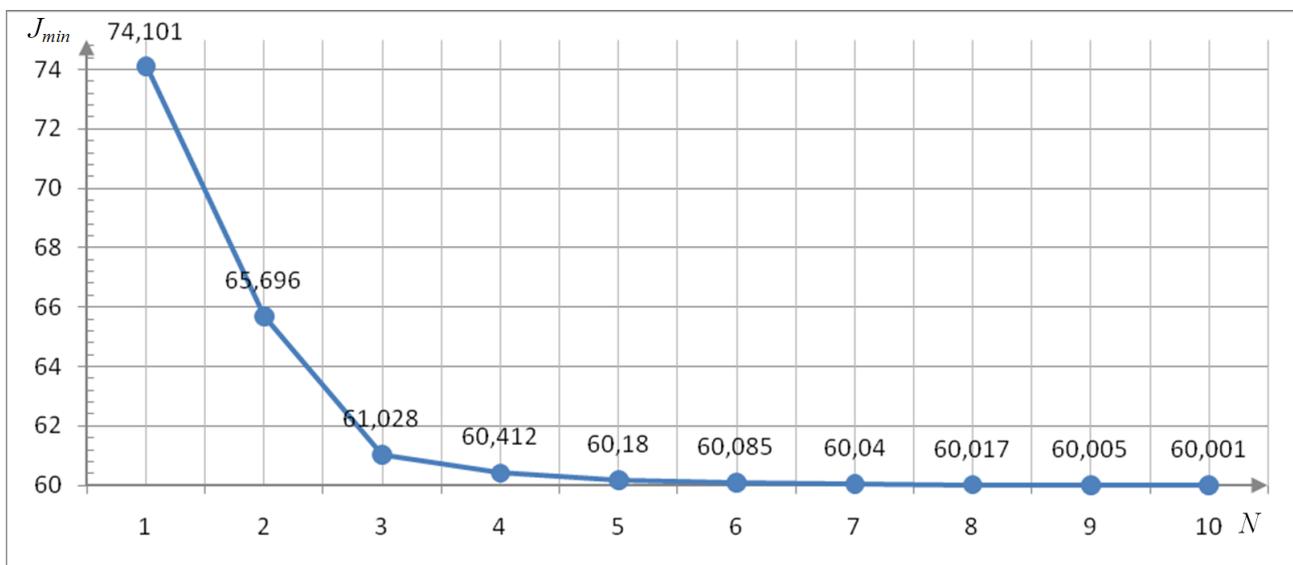


Рис. 3. Оптимальное и неоптимальное распределение плотностей источников  $f$  и соответствующих температур  $T$  на отрезке

Также проведено большое количество экспериментов с различными  $\chi(\vec{x})$  и  $\beta(\vec{x})$  для  $m=2,3$ . Для проверки эффективности использования алгоритма в 3-мерном случае было взято случайное распределение источников тепла (кусочно-постоянная функция  $f$ , рис. 4, а), была решена прямая задача (1), (2) и найдена функция  $u$ . Затем была решена обратная задача с  $m(x,y,z) = \min(u)$  и  $M(x,y,z) = \max(u)$  и найдено оптимальное распределение источников (рис. 4, б). На данных рисунках источники представлены в виде полупрозрачных объёмов. Более интенсивные источники закрашены более тёмным цветом. Для данного эксперимента были взяты следующие входные данные:  $x, y, z \in [0,1]$ ,  $\chi(x, y, z) = 5(1.5 - x)(1.5 - y)(1.5 - z) \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\delta(x, y, z) = 1 \text{ м}^{-1}$ ,  $n = 10^3$ ,  $\nu = 2$ ,  $T_0 = 0$ . Случайное распределение источников даёт суммарную мощность  $98.043^\circ\text{К}\cdot\text{м}^3/\text{с}$  и температуру в границах  $10.005 - 19.108^\circ\text{К}$ . Оптимальное распре-

деление источников составляет суммарную мощность  $60.001^\circ\text{К}\cdot\text{м}^3/\text{с}$  и создаёт температуру в пределах  $10.005 - 11.043^\circ\text{К}$ , что даёт экономию тепловой энергии в размере  $(98.043 - 60.001) / 60.001 \cdot 100\% \approx 63,402\%$ . Отметим, что ввиду неоднородности среды оптимальное расположение источников носит несимметричный характер (рис. 4, б) и плотность источников выше в той части области, где функция  $\chi(x, y, z)$  имеет большие значения. Эксперимент с другими функциями  $\chi(\vec{x})$  также показывает, что чем более неоднородной является среда, тем большую экономию тепловой энергии можно получить, располагая источники оптимальным образом.

Следующий график (рис. 5) показывает, как стабилизируется для данного эксперимента (с описанными выше параметрами области) значение функционала  $(J_n)_{min}$  с ростом числа разбиений  $n = N^3$ .

Рис. 4. Неоптимальное (а) и оптимальное (б) расположение источников  $f$  в кубеРис. 5. Зависимость значения функционала  $(J_n)_{min}$  от  $n = N^3$ 

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Брусенцев А.Г., Брусенцева В.С. Сборник трудов XXIII международной конференции «Математические методы в технике и технологиях». Саратов. –2010.–Т.2. –С.43–46.
2. Брусенцев А.Г., Осипов О.В. Сборник трудов XXIV международной конференции «Математические методы в технике и технологиях» Саратов. –2011.–т.2.–С.33-34.
3. Брусенцев А.Г., Осипов О.В. Научные ведомости Белгородского государственного университета. – №5 (124). Выпуск 26. Белгород. – 2012. – С.60-69.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1977. – 656 с.