

DOI: 10.34031/2071-7318-2025-10-9-89-103

Шбани А., Алван Х.М.Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого***E-mail: ali.shbani951@gmail.com*

РАЗРАБОТКА ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ МОБИЛЬНОГО РОБОТА С ШЕСТЬЮ КОЛЕСАМИ ИЛОНА

Аннотация. Статья посвящена исследованию мобильного робота с шестью колёсами Илона. Среди всех наземных транспортных средств робот с колёсами Илона обладает наибольшими маневренными возможностями и эффективно функционирует в условиях складских помещений, где требуется точное управление и высокая мобильность. Именно этот тип робота был выбран в качестве объекта исследования, поскольку он сочетает в себе универсальность и простоту реализации.

Целью работы является создание динамической модели мобильного робота с шестью колёсами Илона, обеспечивающей возможность анализа и управления его движением. Для достижения данной цели были решены следующие задачи: проведён критический анализ существующих научных и технических источников, разработана динамическая модель робота, а также выполнено её компьютерное моделирование. Динамические уравнения были выведены с использованием уравнений Лагранжа второго рода, что позволило учесть все основные параметры движения.

Мобильный робот рассматривается как планарный механизм, способный осуществлять линейное и угловое движение в горизонтальной плоскости. Предполагается, что движение происходит при условии чистого качения колёс без проскальзывания. Проверка динамической модели проводилась методом моделирования движения по двум траекториям: прямолинейной и криволинейной. Результаты моделирования продемонстрировали высокую точность предлагаемой модели, что подтверждается малыми значениями ошибки скорости.

Ключевые слова: Динамическое моделирование роботов, Мобильный робот, Колесо Илона, Навигация мобильных систем, Анализ движений роботов.

Введение. В последние годы автономные мобильные роботы значительно усовершенствовались, и особое внимание уделяется автоматизированным управляемым транспортным средствам (АУТС) [1–5]. Одной из главных проблем, с которыми сталкиваются такие системы, является улучшение маневренности. Одним из эффективных решений этой проблемы является использование колес Илона – конструктивного элемента, представляющего собой ступицу с роликами, расположенными под углом на окружности [6, 7].

Колеса Илона значительно расширяют возможности движения мобильных роботов, позволяя выполнять сложные траектории и адаптироваться к различным условиям окружающей среды [8–12]. Кинематические и динамические модели роботов с такими колесами подробно исследовались в работах, где анализировалось влияние параметров робота на его поведение [6, 8, 9]. Применение этих колес позволяет реализовать высокоточные алгоритмы управления движением, включая избегание препятствий в динамической среде [10] и эффективное передвижение по сложным поверхностям, таким как лестницы и пересеченная местность [12].

Несмотря на обширное количество публикаций, посвященных мобильным роботам с тремя или четырьмя колесами Илона, работы, исследующие модели с шестью колесами, остаются

крайне редкими [13–16]. Этот аспект открывает перспективы для разработки новых моделей и анализа их поведения в различных условиях.

В большинстве исследований применяются платформы прямоугольной формы, которые обеспечивают равномерное распределение нагрузки и обладают преимуществами в плане грузоподъемности. Однако в некоторых сценариях, таких как сложные маневры или управление на высоких скоростях, круглая платформа может демонстрировать лучшие характеристики. Одним из ключевых преимуществ круглой платформы является её способность обеспечивать более стабильное распределение центробежных сил при выполнении резких поворотов. В прямоугольных конструкциях возможны неравномерные нагрузки на отдельные колёса во время маневров, что может привести к увеличенному износу или ухудшению динамических характеристик. В случае круглой платформы распределение нагрузки остаётся более симметричным, что способствует улучшенной устойчивости при вращении. Кроме того, круглая форма платформы может упростить алгоритмы навигации и управления, особенно в условиях, когда требуется равномерное поведение робота при смене направления. Такая конструкция снижает влияние ориентации корпуса на траекторию движения, что может быть полезным в задачах, требующих высокой точности позиционирования.

Целью данной работы является создание динамической модели мобильного робота с шестью колесами Илона. Кроме того, работа направлена на проверку модели через моделирование движения по прямолинейной и криволинейной траекториям.

Остальная часть исследования включает вывод уравнений динамической модели, моделирование управления движением, а также обсуждение полученных результатов.

Методы, оборудование, материалы. Исследование выполнено с использованием методов теоретической механики и численного моделирования. Для разработки динамической модели мобильного робота применялись уравнения Лагранжа второго рода, что позволило учесть основные параметры движения и взаимодействия робота с окружающей средой.

Моделирование проводилось в программной среде MATLAB с использованием инструмента Simulink и специализированного набора библиотек Robotics Toolbox. Эти инструменты обеспечили возможность анализа движения робота по различным траекториям, включая прямолинейные и криволинейные маршруты.

В процессе разработки модели движение робота рассматривалось на основе предположения о чистом качении колёс без проскальзывания, что упрощает выведение уравнений системы. Особое внимание было уделено точности формулировки кинетической энергии системы и выведению уравнений движения, описывающих поведение робота в горизонтальной плоскости.

Описание динамики робота. Графическое изображение рассматриваемого робота представлено на рис. 1.

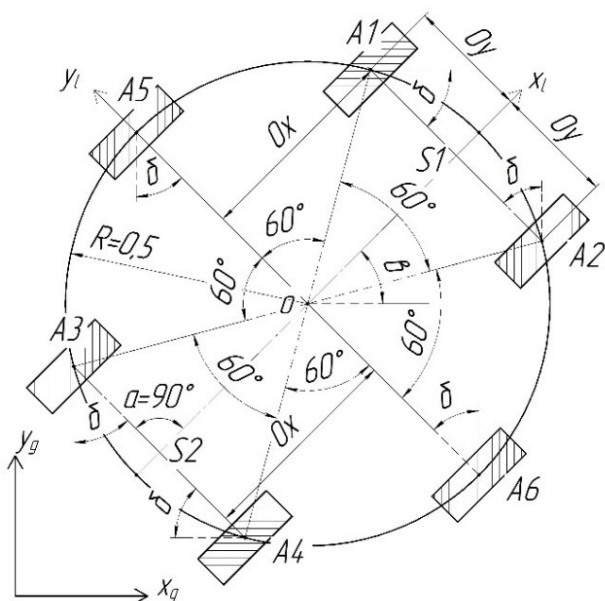


Рис. 1. Аналитическая модель мобильного робота с колесами Илона [15]

В данной работе использованы уравнения Лагранжа второго рода. Для их формулировки предполагается следующий вектор обобщенных координат

$$q = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{bmatrix} \quad (1)$$

В свою очередь, кинематические уравнения робота выводятся с учетом отсутствия скольжения между землей и колесами Илона.

Для получения динамических уравнений движения характеристической точки робота был использован уравнение Лагранжа. Уравнение Лагранжа второго рода можно записать в следующей матричной форме:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q \quad (2)$$

где $L = L(q, \dot{q})$ – кинетический потенциал системы; $q = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6]^T$ – вектор обобщенных координат; $Q = [Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6]^T$ – вектор обобщенных сил.

Кинетический потенциал L системы удовлетворяет следующему соотношению:

$$L = E - U \quad (3)$$

где E – полная кинетическая энергия системы, U – потенциальная энергия системы.

Предполагается, что робот движется по плоской поверхности, поэтому уравнение (3) упрощается до следующего вида:

$$L = E \quad (4)$$

Затем была определена полная кинетическая энергия системы в предположении, что ролики являются пассивными элементами в анализируемой системе. Следовательно, полная кинетическая энергия системы E составляет:

$$E = E_p + E_w \quad (5)$$

где E_p – кинетическая энергия платформы, E_w – кинетическая энергия колес Илона.

Платформа робота движется в плоскости, поэтому кинетическая энергия платформы E_p может быть записана в следующем виде:

$$E_p = \frac{1}{2} m_p (v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2} I_p \dot{\beta}^2 \quad (6)$$

где m_p – масса платформы, I_p – массовый момент инерции платформы робота, определенный относительно оси z_L , проходящей через точку o .

колеса Илона перемещаются в сложном движении, состоящем из плоского подъемного дви-

жения платформы робота и вращательного движения колес, определяемого вокруг оси соб-

ственного вращения колеса Илона. Следовательно, кинетическая энергия колес E_w удовлетворяет следующему соотношению:

$$E_w = 6 \left[\frac{1}{2} m_w (v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2} I_{wzL} \dot{\beta}^2 \right] + \frac{1}{2} I_w (\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 + \dot{\phi}_3^2 + \dot{\phi}_4^2 + \dot{\phi}_5^2 + \dot{\phi}_6^2) \quad (7)$$

где m_w – масса колеса Илона, I_w – массовый момент инерции колеса Илона, определяемый относительно оси, собственное вращение колеса, I_{wzL}

– массовый момент инерции колеса Илона, определяемый относительно оси z_L , проходящей через точку о.

Кинетический потенциал системы можно записать в следующем виде:

$$L = \left(\frac{1}{2} m_p + 3m_w \right) (v_x^2 + v_y^2) + \left(\frac{1}{2} I_p + 3I_{wzL} \right) \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} I_w (\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 + \dot{\phi}_3^2 + \dot{\phi}_4^2 + \dot{\phi}_5^2 + \dot{\phi}_6^2) \quad (8)$$

Будет предполагаться, что:

$$m_{pc} = (m_p + 6m_w) \quad (9)$$

$$I_{pc} = (I_p + 6I_{wzL}) \quad (10)$$

Подставляя уравнения (9) и (10) в уравнение (8), получаем:

$$L = \frac{1}{2} m_{pc} (v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2} I_{pc} \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} I_w (\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 + \dot{\phi}_3^2 + \dot{\phi}_4^2 + \dot{\phi}_5^2 + \dot{\phi}_6^2) \quad (11)$$

Подставляя уравнения кинематической модели [15] в уравнение (11), получаем:

$$L = \left(\begin{aligned} & \frac{1}{2} m_{pc} \left[\left(r \left(\frac{\phi_1}{4} + \frac{\phi_2}{8} + \frac{\phi_3}{8} + \frac{\phi_4}{4} + \frac{\phi_5}{8} + \frac{\phi_6}{8} \right) \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(r \left(-\frac{\phi_1}{4} + \frac{\phi_2}{8} + \frac{\phi_3}{8} - \frac{\phi_4}{4} + \frac{\phi_5}{8} + \frac{\phi_6}{8} \right) \right)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2} I_{pc} \left[\frac{r}{4R(\sqrt{3}+3)} \left(-(\sqrt{3}+1)\dot{\phi}_1 + (\sqrt{3}+1)\dot{\phi}_2 + \right. \right. \\ & \left. \left. -(\sqrt{3}+1)\dot{\phi}_3 + (\sqrt{3}+1)\dot{\phi}_4 - 2\dot{\phi}_5 + 2\dot{\phi}_6 \right) \right]^2 + \\ & \left. + \frac{1}{2} I_w (\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 + \dot{\phi}_3^2 + \dot{\phi}_4^2 + \dot{\phi}_5^2 + \dot{\phi}_6^2) \right] \end{aligned} \right) \quad (12)$$

Будем считать, что:

$$A = \frac{m_{pc} r^2}{128} \quad (13)$$

$$B = \frac{I_{pc} r^2}{32R^2(3+6\sqrt{3}+9)} = \frac{I_{pc} r^2}{32R^2(12+6\sqrt{3})} = \frac{I_{pc} r^2}{192R^2(2+\sqrt{3})} \quad (14)$$

$$C = \frac{I_w}{2} \quad (15)$$

Подставляя уравнения (13), (14) и (15) в уравнение (12), получаем:

$$L = \left(\begin{aligned} & A[(2\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_3 + 2\dot{\phi}_4 + \dot{\phi}_5 + \dot{\phi}_6)^2 + (-2\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_3 - 2\dot{\phi}_4 + \dot{\phi}_5 + \dot{\phi}_6)^2] + \\ & + B[-(\sqrt{3}+1)\dot{\phi}_1 + (\sqrt{3}+1)\dot{\phi}_2 - (\sqrt{3}+1)\dot{\phi}_3 + (\sqrt{3}+1)\dot{\phi}_4 - 2\dot{\phi}_5 + 2\dot{\phi}_6]^2 + \\ & + C(\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 + \dot{\phi}_3^2 + \dot{\phi}_4^2 + \dot{\phi}_5^2 + \dot{\phi}_6^2) \end{aligned} \right) \quad (16)$$

$$\Rightarrow L = \left(\begin{aligned} & (8A + (4 + 2\sqrt{3})B + C)\dot{\phi}_1^2 + (2A + (4 + 2\sqrt{3})B + C)\dot{\phi}_2^2 + \\ & + (2A + (4 + 2\sqrt{3})B + C)\dot{\phi}_3^2 + (8A + (4 + 2\sqrt{3})B + C)\dot{\phi}_4^2 + (2A + 4B + C)\dot{\phi}_5^2 + \\ & + (2A + 4B + C)\dot{\phi}_6^2 - 2(4 + 2\sqrt{3})B\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 + 2(4 + 2\sqrt{3})B\dot{\phi}_1\dot{\phi}_3 + \\ & + (16A - 2(4 + 2\sqrt{3})B)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_4 + 4(\sqrt{3}+1)B\dot{\phi}_1\dot{\phi}_5 - 4(\sqrt{3}+1)B\dot{\phi}_1\dot{\phi}_6 + \\ & + (4A - 2(4 + 2\sqrt{3})B)\dot{\phi}_2\dot{\phi}_3 + 2(4 + 2\sqrt{3})B\dot{\phi}_2\dot{\phi}_4 + (4A - 4(\sqrt{3}+1)B)\dot{\phi}_2\dot{\phi}_5 + \\ & + (4A + 4(\sqrt{3}+1)B)\dot{\phi}_2\dot{\phi}_6 - 2(4 + 2\sqrt{3})B\dot{\phi}_3\dot{\phi}_4 + (4A + 4(\sqrt{3}+1)B)\dot{\phi}_3\dot{\phi}_5 + \\ & + (4A - 4(\sqrt{3}+1)B)\dot{\phi}_3\dot{\phi}_6 - 4(\sqrt{3}+1)B\dot{\phi}_4\dot{\phi}_5 + 4(\sqrt{3}+1)B\dot{\phi}_4\dot{\phi}_6 + (4A - 8B)\dot{\phi}_5\dot{\phi}_6 \end{aligned} \right) \quad (17)$$

Чтобы установить конкретные обобщенные силы, действующие на отдельные колеса, силы и

моменты сил, действующие на каждое колесо, графически показаны на рисунке 2а и 2б.

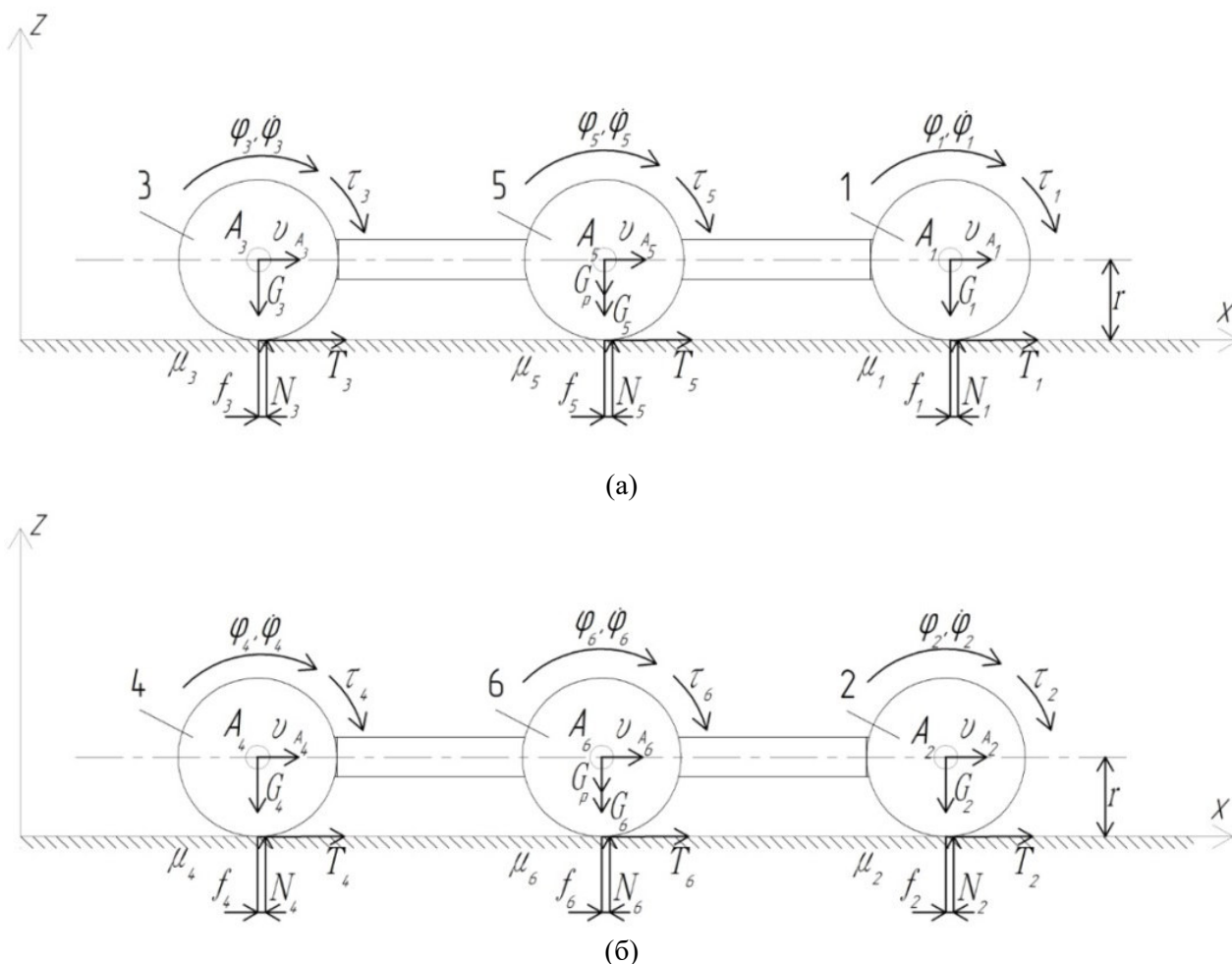


Рис. 2. (а) Силы и моменты сил, действующих на колеса № 1, 3, 5,
(б) Силы и моменты сил, действующих на колеса № 2, 4, 6

i -е колесо Илона приводится в движение за счет тягового момента τ_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), исходящего от i -й системы передачи энергии. Кроме того, предполагалось, что вес платформы колесного мобильного робота равен G_p , тогда как вес i -го колеса Илона равен G_i , и оно движется по

плоской, шероховатой (коэффициент сухого трения μ_i) и деформируемой (коэффициент трения качения f_i) поверхности без заноса. При анализе также учитывается сила сухого трения T_i и сила давления N_i для i -го колеса.

Работа системы сил составляет:

$$D = Q_i q_i, (i = 1, 2, \dots, 6) = \left([\tau_1 - T_1 r] \varphi_1 + [\tau_2 - T_2 r] \varphi_2 + [\tau_3 - T_3 r] \varphi_3 + \right. \\ \left. + [\tau_4 - T_4 r] \varphi_4 + [\tau_5 - T_5 r] \varphi_5 + [\tau_6 - T_6 r] \varphi_6 \right) \quad (18)$$

Величину сухого трения T_i можно вывести из рисунка 3, который показывает соотношение сил, действующих на колесо:

$$T = RF \sin \theta \quad (19)$$

где RF – сила реакции. Поскольку θ – малый угол, можно найти следующее:

$$T = RF \sin \theta \approx RF \tan \theta \approx RF \theta \quad (20)$$

Теперь, умножив и разделив r_1 на r_1 :

$$T = \frac{RF \theta r_1}{r_1} \quad \text{но} \quad f = r_1 \theta \Rightarrow T = \frac{RF f}{r_1} \Rightarrow T r_1 = RF f \quad (21)$$

Возвращаясь к рисунку 4, можно найти:

$$RF^2 = G^2 + T^2 = (-N)^2 + T^2 = N^2 + T^2 \Rightarrow RF = \sqrt{N^2 + T^2} \quad (22)$$

Подставляя уравнение (22) в уравнение (21):

$$Tr_1 = (\sqrt{N^2 + T^2})f \Rightarrow T^2 r_1^2 = (N^2 + T^2)f^2 \Rightarrow T^2(r_1^2 - f^2) = N^2 f^2 \Rightarrow T = \frac{Nf}{\sqrt{r_1^2 - f^2}} = \frac{Nf}{r} \quad (23)$$

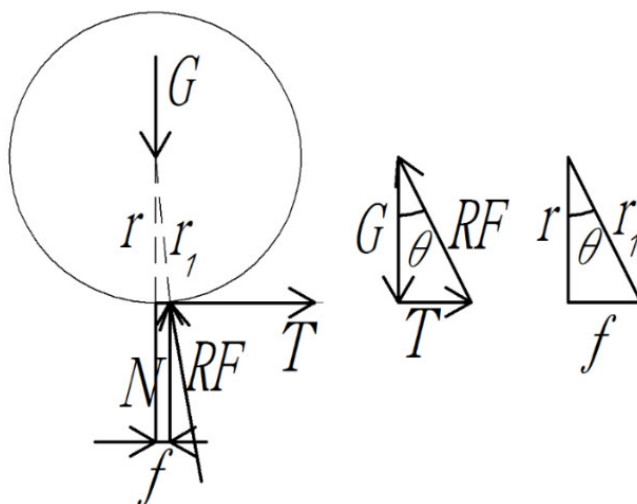


Рис. 3. Силы, действующие на колесо

Уравнение (23) компенсируется уравнением (18):

$$D = \left(\left[\tau_1 - \frac{N_1 f_1}{r} r \right] \varphi_1 + \left[\tau_2 - \frac{N_2 f_2}{r} r \right] \varphi_2 + \left[\tau_3 - \frac{N_3 f_3}{r} r \right] \varphi_3 + \right. \\ \left. + \left[\tau_4 - \frac{N_4 f_4}{r} r \right] \varphi_4 + \left[\tau_5 - \frac{N_5 f_5}{r} r \right] \varphi_5 + \left[\tau_6 - \frac{N_6 f_6}{r} r \right] \varphi_6 \right) \\ \Rightarrow D = \left([\tau_1 - N_1 f_1] \varphi_1 + [\tau_2 - N_2 f_2] \varphi_2 + [\tau_3 - N_3 f_3] \varphi_3 + \right. \\ \left. + [\tau_4 - N_4 f_4] \varphi_4 + [\tau_5 - N_5 f_5] \varphi_5 + [\tau_6 - N_6 f_6] \varphi_6 \right) \quad (24)$$

Таким образом, мощность обобщенных сил составляет:

$$P = Q_i \dot{q}_i, (i = 1, 2, \dots, 6) = \left([\tau_1 - N_1 f_1] \dot{\varphi}_1 + [\tau_2 - N_2 f_2] \dot{\varphi}_2 + [\tau_3 - N_3 f_3] \dot{\varphi}_3 + \right. \\ \left. + [\tau_4 - N_4 f_4] \dot{\varphi}_4 + [\tau_5 - N_5 f_5] \dot{\varphi}_5 + [\tau_6 - N_6 f_6] \dot{\varphi}_6 \right) \quad (25)$$

Но при расчете величины сухого трения необходимо учитывать направление угловой скорости (знак угловой скорости), поэтому уравнение (25) принимает следующий вид:

$$P = Q_i \dot{q}_i, (i = 1, 2, \dots, 6) = \left([\tau_1 - N_1 f_1 \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_1)] \dot{\varphi}_1 + [\tau_2 - N_2 f_2 \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_2)] \dot{\varphi}_2 + \right. \\ \left. + [\tau_3 - N_3 f_3 \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_3)] \dot{\varphi}_3 + [\tau_4 - N_4 f_4 \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_4)] \dot{\varphi}_4 + \right. \\ \left. + [\tau_5 - N_5 f_5 \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_5)] \dot{\varphi}_5 + [\tau_6 - N_6 f_6 \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_6)] \dot{\varphi}_6 \right) \quad (26)$$

Уравнение (26) показывает, что вектор обобщенных сил можно записать в следующем виде:

$$Q = [Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6]^T = \left[\tau_1 - N_1 f_1 \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_1), \tau_2 - N_2 f_2 \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_2), \tau_3 - N_3 f_3 \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_3), \right. \\ \left. \tau_4 - N_4 f_4 \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_4), \tau_5 - N_5 f_5 \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_5), \tau_6 - N_6 f_6 \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_6) \right]^T \quad (27)$$

Наконец, используя уравнения Лагранжа второго рода, получаются следующие системные уравнения:

$$\left(2(8A + (4 + 2\sqrt{3})B + C)\ddot{\varphi}_1 - 2(4 + 2\sqrt{3})B\ddot{\varphi}_2 + 2(4 + 2\sqrt{3})B\ddot{\varphi}_3 + \right. \\ \left. + (16A - 2(4 + 2\sqrt{3})B)\ddot{\varphi}_4 + 4(\sqrt{3} + 1)B\ddot{\varphi}_5 - 4(\sqrt{3} + 1)B\ddot{\varphi}_6 \right) = \tau_1 - N_1 f_1 \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_1) \quad (28)$$

$$\left(2(2A + (4 + 2\sqrt{3})B + C)\ddot{\varphi}_2 - 2(4 + 2\sqrt{3})B\ddot{\varphi}_1 + \right. \\ \left. + (4A - 2(4 + 2\sqrt{3})B)\ddot{\varphi}_3 + 2(4 + 2\sqrt{3})B\ddot{\varphi}_4 + \right. \\ \left. + (4A - 4(\sqrt{3} + 1)B)\ddot{\varphi}_5 + (4A + 4(\sqrt{3} + 1)B)\ddot{\varphi}_6 \right) = \tau_2 - N_2 f_2 \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_2) \quad (29)$$

$$\left(2(2A + (4 + 2\sqrt{3})B + C)\ddot{\varphi}_3 + 2(4 + 2\sqrt{3})B\ddot{\varphi}_1 + \right. \\ \left. + (4A - 2(4 + 2\sqrt{3})B)\ddot{\varphi}_2 - 2(4 + 2\sqrt{3})B\ddot{\varphi}_4 + \right. \\ \left. + (4A + 4(\sqrt{3} + 1)B)\ddot{\varphi}_5 + (4A - 4(\sqrt{3} + 1)B)\ddot{\varphi}_6 \right) = \tau_3 - N_3 f_3 \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_3) \quad (30)$$

$$\begin{pmatrix} 2(8A + (4 + 2\sqrt{3})B + C)\ddot{\phi}_4 + (16A - 2(4 + 2\sqrt{3})B)\ddot{\phi}_1 + \\ + 2(4 + 2\sqrt{3})B\ddot{\phi}_2 - 2(4 + 2\sqrt{3})B\ddot{\phi}_3 + \\ - 4(\sqrt{3} + 1)B\ddot{\phi}_5 + 4(\sqrt{3} + 1)B\ddot{\phi}_6 \end{pmatrix} = \tau_4 - N_4 f_4 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_4) \quad (31)$$

$$\begin{pmatrix} 2(2A + 4B + C)\ddot{\phi}_5 + 4(\sqrt{3} + 1)B\ddot{\phi}_1 + (4A - 4(\sqrt{3} + 1)B)\ddot{\phi}_2 + \\ + (4A + 4(\sqrt{3} + 1)B)\ddot{\phi}_3 - 4(\sqrt{3} + 1)B\ddot{\phi}_4 + (4A - 8B)\ddot{\phi}_6 \end{pmatrix} = \tau_5 - N_5 f_5 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_5) \quad (32)$$

$$\begin{pmatrix} 2(2A + 4B + C)\ddot{\phi}_6 - 4(\sqrt{3} + 1)B\ddot{\phi}_1 + (4A + 4(\sqrt{3} + 1)B)\ddot{\phi}_2 + \\ + (4A - 4(\sqrt{3} + 1)B)\ddot{\phi}_3 + 4(\sqrt{3} + 1)B\ddot{\phi}_4 + (4A - 8B)\ddot{\phi}_5 \end{pmatrix} = \tau_6 - N_6 f_6 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_6) \quad (33)$$

Итак, мы можем написать:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \\ \ddot{\phi}_3 \\ \ddot{\phi}_4 \\ \ddot{\phi}_5 \\ \ddot{\phi}_6 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Учитывая, что v_x, v_y — центральные скорости робота в локальных координатах, их можно

выразить в обобщенных координатах следующим образом:

$$v_x = \dot{x}_g \cos \beta + \dot{y}_g \sin \beta \quad (35)$$

$$v_y = -\dot{x}_g \sin \beta + \dot{y}_g \cos \beta \quad (36)$$

Здесь уравнения (35) и (36) должны быть выведены по времени, а затем приравнены к прямой кинематической модели после ее вывода по времени. Таким образом, мы получаем:

$$\ddot{x}_g \cos \beta - \dot{x}_g \dot{\beta} \sin \beta + \ddot{y}_g \sin \beta + \dot{y}_g \dot{\beta} \cos \beta = r \left(\frac{\ddot{\phi}_1}{4} + \frac{\ddot{\phi}_2}{8} + \frac{\ddot{\phi}_3}{8} + \frac{\ddot{\phi}_4}{4} + \frac{\ddot{\phi}_5}{8} + \frac{\ddot{\phi}_6}{8} \right) \quad (37)$$

$$-\ddot{x}_g \sin \beta - \dot{x}_g \dot{\beta} \cos \beta + \ddot{y}_g \cos \beta - \dot{y}_g \dot{\beta} \sin \beta = r \left(-\frac{\ddot{\phi}_1}{4} + \frac{\ddot{\phi}_2}{8} + \frac{\ddot{\phi}_3}{8} - \frac{\ddot{\phi}_4}{4} + \frac{\ddot{\phi}_5}{8} + \frac{\ddot{\phi}_6}{8} \right) \quad (38)$$

$$\ddot{\beta} = \frac{r}{4R(\sqrt{3}+3)} \left(-(\sqrt{3}+1)\ddot{\phi}_1 + (\sqrt{3}+1)\ddot{\phi}_2 - (\sqrt{3}+1)\ddot{\phi}_3 + \right. \\ \left. + (\sqrt{3}+1)\ddot{\phi}_4 - 2\ddot{\phi}_5 + 2\ddot{\phi}_6 \right) \quad (39)$$

Здесь мы должны найти уравнения для $\ddot{\phi}_1, \ddot{\phi}_2, \ddot{\phi}_3, \ddot{\phi}_4, \ddot{\phi}_5, \ddot{\phi}_6$ из уравнения (34), затем подставить полученные уравнения в уравнения

(37), (38), (39), чтобы найти требуемую динамическую модель.

Из уравнения (34) получаем:

$$\ddot{\phi}_1 = \left(\begin{aligned} & \frac{(6\sqrt{3}+20)BC^2 + (32\sqrt{3}+128)ABC + C^3 + 8AC^2}{2((8\sqrt{3}+24)BC^3 + (128\sqrt{3}+384)ABC^2 + C^4 + 16AC^3)} (\tau_1 - N_1 f_1 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_1)) + \\ & + \frac{(2+\sqrt{3})BC}{(8\sqrt{3}+24)BC^2 + C^3} (\tau_2 - N_2 f_2 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_2)) - \frac{(2+\sqrt{3})BC}{(8\sqrt{3}+24)BC^2 + C^3} (\tau_3 - N_3 f_3 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_3)) + \\ & + \frac{(2+\sqrt{3})BC^2 - (16\sqrt{3}+64)ABC - 4AC^2}{(8\sqrt{3}+24)BC^3 + (128\sqrt{3}+384)ABC^2 + C^4 + 16AC^3} (\tau_4 - N_4 f_4 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_4)) + \\ & + \frac{-(1+\sqrt{3})B}{(8\sqrt{3}+24)BC + C^2} (\tau_5 - N_5 f_5 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_5)) + \frac{(1+\sqrt{3})B}{(8\sqrt{3}+24)BC + C^2} (\tau_6 - N_6 f_6 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_6)) \end{aligned} \right) \quad (40)$$

$$\ddot{\phi}_2 = \left(\begin{aligned} & \frac{(2+\sqrt{3})BC}{(8\sqrt{3}+24)BC^2 + C^3} (\tau_1 - N_1 f_1 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_1)) + \\ & + \frac{(6\sqrt{3}+20)BC^2 + (32\sqrt{3}+112)ABC + C^3 + 6AC^2}{2((8\sqrt{3}+24)BC^3 + (64\sqrt{3}+192)ABC^2 + C^4 + 8AC^3)} (\tau_2 - N_2 f_2 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_2)) + \\ & + \frac{(2+\sqrt{3})BC - 8AB - AC}{(8\sqrt{3}+24)BC^2 + (64\sqrt{3}+192)ABC + C^3 + 8AC^2} (\tau_3 - N_3 f_3 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_3)) + \\ & + \frac{-(2+\sqrt{3})BC}{(8\sqrt{3}+24)BC^2 + C^3} (\tau_4 - N_4 f_4 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_4)) + \\ & + \frac{(1+\sqrt{3})BC^2 - 16ABC - AC^2}{(8\sqrt{3}+24)BC^3 + (64\sqrt{3}+192)ABC^2 + C^4 + 8AC^3} (\tau_5 - N_5 f_5 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_5)) + \\ & + \frac{-(1+\sqrt{3})BC^2 - (16\sqrt{3}+32)ABC - AC^2}{(8\sqrt{3}+24)BC^3 + (64\sqrt{3}+192)ABC^2 + C^4 + 8AC^3} (\tau_6 - N_6 f_6 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_6)) \end{aligned} \right) \quad (41)$$

$$\ddot{\phi}_3 = \left(\begin{aligned} & \frac{-(2+\sqrt{3})BC}{(8\sqrt{3}+24)BC^2+C^3} (\tau_1 - N_1 f_1 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_1)) + \\ & + \frac{(2+\sqrt{3})BC-8AB-AC}{(8\sqrt{3}+24)BC^2+(64\sqrt{3}+192)ABC+C^3+8AC^2} (\tau_2 - N_2 f_2 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_2)) + \\ & + \frac{(6\sqrt{3}+20)BC^2+(32\sqrt{3}+112)ABC+C^3+6AC^2}{2((8\sqrt{3}+24)BC^3+(64\sqrt{3}+192)ABC^2+C^4+8AC^3)} (\tau_3 - N_3 f_3 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_3)) + \\ & + \frac{(2+\sqrt{3})BC}{(8\sqrt{3}+24)BC^2+C^3} (\tau_4 - N_4 f_4 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_4)) + \\ & + \frac{-(1+\sqrt{3})BC^2-(16\sqrt{3}+32)ABC-AC^2}{(8\sqrt{3}+24)BC^3+(64\sqrt{3}+192)ABC^2+C^4+8AC^3} (\tau_5 - N_5 f_5 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_5)) + \\ & + \frac{(1+\sqrt{3})BC^2-16ABC-AC^2}{(8\sqrt{3}+24)BC^3+(64\sqrt{3}+192)ABC^2+C^4+8AC^3} (\tau_6 - N_6 f_6 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_6)) \end{aligned} \right) \quad (42)$$

$$\ddot{\phi}_4 = \left(\begin{aligned} & \frac{(2+\sqrt{3})BC^2-(16\sqrt{3}+64)ABC-4AC^2}{(8\sqrt{3}+24)BC^3+(128\sqrt{3}+384)ABC^2+C^4+16AC^3} (\tau_1 - N_1 f_1 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_1)) + \\ & + \frac{-(2+\sqrt{3})BC}{(8\sqrt{3}+24)BC^2+C^3} (\tau_2 - N_2 f_2 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_2)) + \frac{(2+\sqrt{3})BC}{(8\sqrt{3}+24)BC^2+C^3} (\tau_3 - N_3 f_3 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_3)) + \\ & + \frac{(6\sqrt{3}+20)BC^2+(32\sqrt{3}+128)ABC+C^3+8AC^2}{2((8\sqrt{3}+24)BC^3+(128\sqrt{3}+384)ABC^2+C^4+16AC^3)} (\tau_4 - N_4 f_4 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_4)) + \\ & + \frac{(1+\sqrt{3})B}{(8\sqrt{3}+24)BC+C^2} (\tau_5 - N_5 f_5 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_5)) + \frac{-(1+\sqrt{3})B}{(8\sqrt{3}+24)BC+C^2} (\tau_6 - N_6 f_6 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_6)) \end{aligned} \right) \quad (43)$$

$$\ddot{\phi}_5 = \left(\begin{aligned} & \frac{-(1+\sqrt{3})B}{(8\sqrt{3}+24)BC+C^2} (\tau_1 - N_1 f_1 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_1)) + \\ & + \frac{(1+\sqrt{3})BC^2-16ABC-AC^2}{(8\sqrt{3}+24)BC^3+(64\sqrt{3}+192)ABC^2+C^4+8AC^3} (\tau_2 - N_2 f_2 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_2)) + \\ & + \frac{-(1+\sqrt{3})BC^2-(16\sqrt{3}+32)ABC-AC^2}{(8\sqrt{3}+24)BC^3+(64\sqrt{3}+192)ABC^2+C^4+8AC^3} (\tau_3 - N_3 f_3 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_3)) + \\ & + \frac{(1+\sqrt{3})B}{(8\sqrt{3}+24)BC+C^2} (\tau_4 - N_4 f_4 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_4)) + \\ & + \frac{(8\sqrt{3}+20)BC^2+(48\sqrt{3}+112)ABC+C^3+6AC^2}{2((8\sqrt{3}+24)BC^3+(64\sqrt{3}+192)ABC^2+C^4+8AC^3)} (\tau_5 - N_5 f_5 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_5)) + \\ & + \frac{2BC^2-(8\sqrt{3}+8)ABC-AC^2}{(8\sqrt{3}+24)BC^3+(64\sqrt{3}+192)ABC^2+C^4+8AC^3} (\tau_6 - N_6 f_6 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_6)) \end{aligned} \right) \quad (44)$$

$$\ddot{\phi}_6 = \left(\begin{aligned} & \frac{(1+\sqrt{3})B}{(8\sqrt{3}+24)BC+C^2} (\tau_1 - N_1 f_1 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_1)) + \\ & + \frac{-(1+\sqrt{3})BC^2-(16\sqrt{3}+32)ABC-AC^2}{(8\sqrt{3}+24)BC^3+(64\sqrt{3}+192)ABC^2+C^4+8AC^3} (\tau_2 - N_2 f_2 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_2)) + \\ & + \frac{(1+\sqrt{3})BC^2-16ABC-AC^2}{(8\sqrt{3}+24)BC^3+(64\sqrt{3}+192)ABC^2+C^4+8AC^3} (\tau_3 - N_3 f_3 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_3)) + \\ & + \frac{-(1+\sqrt{3})B}{(8\sqrt{3}+24)BC+C^2} (\tau_4 - N_4 f_4 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_4)) + \\ & + \frac{2BC^2-(8\sqrt{3}+8)ABC-AC^2}{(8\sqrt{3}+24)BC^3+(64\sqrt{3}+192)ABC^2+C^4+8AC^3} (\tau_5 - N_5 f_5 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_5)) + \\ & + \frac{(8\sqrt{3}+20)BC^2+(48\sqrt{3}+112)ABC+C^3+6AC^2}{2((8\sqrt{3}+24)BC^3+(64\sqrt{3}+192)ABC^2+C^4+8AC^3)} (\tau_6 - N_6 f_6 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_6)) \end{aligned} \right) \quad (45)$$

Теперь, подставляя уравнения (40, ..., 45) в уравнения (37), (38), (39), получаем:

$$\ddot{x}_g = -\dot{y}_g \dot{\beta} + r \left[\begin{aligned} & (\cos \beta - \sin \beta) \left(\tau_2 + \tau_3 + \tau_5 + \tau_6 - N_2 f_2 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_2) - N_3 f_3 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_3) - \right. \\ & \left. - N_5 f_5 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_5) - N_6 f_6 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_6) \right) * \\ & * \left(\frac{(8\sqrt{3}+24)B+C}{16[(8\sqrt{3}+24)BC+(64\sqrt{3}+192)AB+C^2+8AC]} \right) + \\ & + (\cos \beta + \sin \beta) (\tau_1 + \tau_4 - N_1 f_1 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_1) - N_4 f_4 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_4)) * \\ & * \left(\frac{(8\sqrt{3}+24)B+C}{8[(8\sqrt{3}+24)BC+(128\sqrt{3}+384)AB+C^2+16AC]} \right) \end{aligned} \right] \quad (46)$$

$$\dot{y}_g = \dot{x}_g \dot{\beta} + r \left[\begin{aligned} & \left((\sin \beta + \cos \beta) (\tau_2 + \tau_3 + \tau_5 + \tau_6 - N_2 f_2 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_2) - N_3 f_3 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_3) - \right. \\ & \left. - N_5 f_5 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_5) - N_6 f_6 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_6)) \right) * \\ & * \left(\frac{(8\sqrt{3}+24)B+C}{16[(8\sqrt{3}+24)BC+(64\sqrt{3}+192)AB+C^2+8AC]} \right) + \\ & + (\sin \beta - \cos \beta) (\tau_1 + \tau_4 - N_1 f_1 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_1) - N_4 f_4 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_4)) * \\ & * \left(\frac{(8\sqrt{3}+24)B+C}{8[(8\sqrt{3}+24)BC+(128\sqrt{3}+384)AB+C^2+16AC]} \right) \end{aligned} \right] \quad (47)$$

$$\ddot{\beta} = \frac{r}{4R(\sqrt{3}+3)} \left[\begin{aligned} & \left(\frac{-(\sqrt{3}+1)[(4\sqrt{3}+16)BC+(64\sqrt{3}+256)AB+C^2+16AC]}{2[(8\sqrt{3}+24)BC^2+(128\sqrt{3}+384)ABC+C^3+16AC^2]} + \right. \\ & \left. + \frac{(8+2\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)B}{(8\sqrt{3}+24)BC+C^2} \right) * \\ & * (\tau_1 - \tau_4 - N_1 f_1 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_1) + N_4 f_4 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_4)) + \\ & + \left(\frac{-2(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)B}{(8\sqrt{3}+24)BC+C^2} + \right. \\ & \left. + \frac{(4\sqrt{3}+8)(\sqrt{3}+1)BC+(96\sqrt{3}+160)AB+(\sqrt{3}+1)C^2+8(\sqrt{3}+1)AC}{2[(8\sqrt{3}+24)BC^2+(64\sqrt{3}+192)ABC+C^3+8AC^2]} \right) * \\ & * (\tau_2 - \tau_3 - N_2 f_2 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_2) + N_3 f_3 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_3)) + \\ & + \left(\frac{2(\sqrt{3}+1)^2 B}{(8\sqrt{3}+24)BC+C^2} + \right. \\ & \left. + \frac{(-8-4\sqrt{3})BC+(-32\sqrt{3}-64)AB-C^2-8AC}{(8\sqrt{3}+24)BC^2+(64\sqrt{3}+192)ABC+C^3+8AC^2} \right) * \\ & * (\tau_5 - \tau_6 - N_5 f_5 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_5) + N_6 f_6 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_6)) \end{aligned} \right] \quad (48)$$

Из уравнений (46), (47), (48) можно записать следующую общую форму:

$$\ddot{q} = U(q, \dot{q})\dot{q} + H(q)\tau + W(q)SNF \quad (49)$$

где:

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_g \\ \ddot{y}_g \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix}, \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x}_g \\ \dot{y}_g \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}, U(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\beta} & 0 \\ \dot{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_5) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_6) \end{bmatrix},$$

$$H^T(q) = \begin{bmatrix} (\cos \beta + \sin \beta)h_1 & (\sin \beta - \cos \beta)h_1 & h_3 \\ (\cos \beta - \sin \beta)h_2 & (\cos \beta + \sin \beta)h_2 & h_4 \\ (\cos \beta - \sin \beta)h_2 & (\cos \beta + \sin \beta)h_2 & -h_4 \\ (\cos \beta + \sin \beta)h_1 & (\sin \beta - \cos \beta)h_1 & -h_3 \\ (\cos \beta - \sin \beta)h_2 & (\cos \beta + \sin \beta)h_2 & h_5 \\ (\cos \beta - \sin \beta)h_2 & (\cos \beta + \sin \beta)h_2 & -h_5 \end{bmatrix},$$

$$W(q) = -H(q)$$

где

$$h_1 = r \left[\frac{(8\sqrt{3} + 24)B + C}{8[(8\sqrt{3} + 24)BC + (128\sqrt{3} + 384)AB + C^2 + 16AC]} \right],$$

$$h_2 = r \left[\frac{(8\sqrt{3} + 24)B + C}{16[(8\sqrt{3} + 24)BC + (64\sqrt{3} + 192)AB + C^2 + 8AC]} \right],$$

$$h_3 = \frac{r}{4R(\sqrt{3} + 3)} \left[\frac{-(\sqrt{3} + 1)[(4\sqrt{3} + 16)BC + (64\sqrt{3} + 256)AB + C^2 + 16AC]}{2[(8\sqrt{3} + 24)BC^2 + (128\sqrt{3} + 384)ABC + C^3 + 16AC^2]} + \frac{(8 + 2\sqrt{3})(\sqrt{3} + 1)B}{(8\sqrt{3} + 24)BC + C^2} \right],$$

$$h_4 = \frac{r}{4R(\sqrt{3} + 3)} \left[\frac{-2(2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} + 1)B}{(8\sqrt{3} + 24)BC + C^2} + \frac{(4\sqrt{3} + 8)(\sqrt{3} + 1)BC + (96\sqrt{3} + 160)AB + (\sqrt{3} + 1)C^2 + 8(\sqrt{3} + 1)AC}{2[(8\sqrt{3} + 24)BC^2 + (64\sqrt{3} + 192)ABC + C^3 + 8AC^2]} \right],$$

$$h_5 = \frac{r}{4R(\sqrt{3} + 3)} \left[\frac{2(\sqrt{3} + 1)^2 B}{(8\sqrt{3} + 24)BC + C^2} + \frac{(-8 - 4\sqrt{3})BC + (-32\sqrt{3} - 64)AB - C^2 - 8AC}{(8\sqrt{3} + 24)BC^2 + (64\sqrt{3} + 192)ABC + C^3 + 8AC^2} \right].$$

Из уравнения (49) можно написать:

$$\tau = H^{-1}(q)\ddot{q} - H^{-1}(q)U(q, \dot{q})\dot{q} + SNF \quad (50)$$

Полученная математическая модель была использована для проведения численных моделирований движения выбранной характерной точки робота.

Численное моделирование. В ходе численных исследований была проведена симуляция для отображения движения характерной точки робота по двум траекториям: прямолинейной и криволинейной. Моделирование уравнения (50) выполнялось в среде Matlab Simulink. Для проведения численного моделирования движения выбранной точки робота были приняты следующие геометрические параметры: $\delta = \pi/4$ [рад], $R = 0.5$ [м], $r = 0.052$ [м]. Другие константы, использованные в симуляции: $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = f_6 = 0.002$ [м], $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = N_5 = N_6 = 1455.1$ [Н], $I_w = 0.4688$ [кг·м²], $m_p = 20$ [кг], $m_w = 0.5$ [кг].

Были заданы следующие начальные условия: $x_0(0) = 0$, $y_0(0) = 0$, $v_x(0) = 0$, $v_y(0) = 0$, $\beta(0) = 0$, $\dot{\beta}(0) = 0$ в симуляции. В свою очередь, каркас робота движется с постоянной конфигурацией в течение симуляции: $\beta(t) = \beta(0)$.

1. Движение по прямолинейной траектории:

На рисунке 4 показана смоделированная прямолинейная траектория.

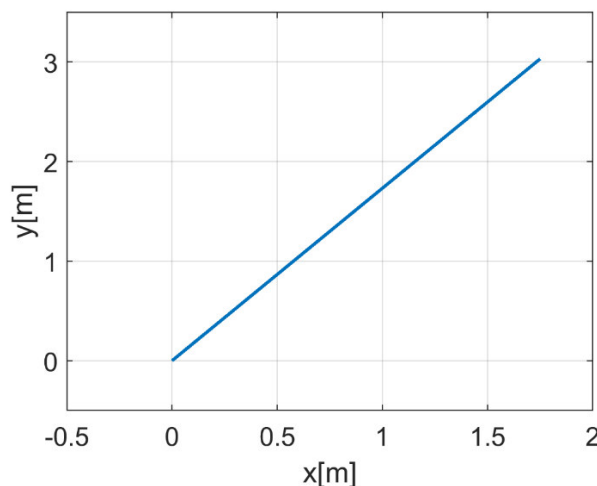


Рис. 4. Симулированная прямолинейная траектория

На рисунке 5 показано, как ведет себя набор скоростей для выбранной точки робота: $v_x(t)$, $v_y(t)$, $\dot{\beta}(t)$.

На рисунке 6 показано, как ведет себя набор ускорений выбранной точки робота: $\dot{v}_x(t)$, $\dot{v}_y(t)$, $\ddot{\beta}(t)$.

Рисунки 7 и 8 иллюстрируют решение задачи обратной кинематики: поведение угловых скоростей и угловых ускорений отдельных колес.

На рисунке 9 показано решение задачи обратной динамики: поведение приводных моментов отдельных колес.

Рисунок 10 демонстрирует величину ошибки между эталонной скоростью и скоростью, полученной в модели прямой динамики.

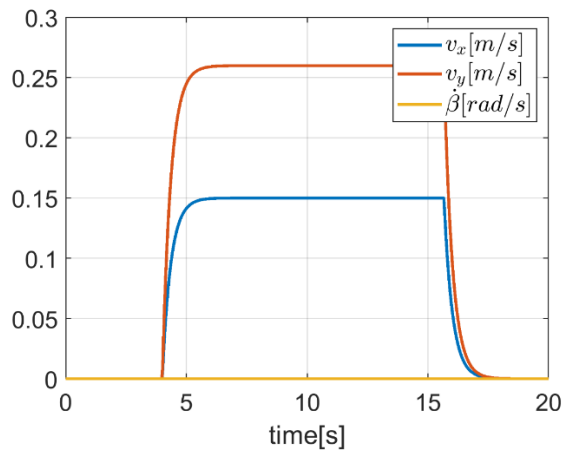


Рис. 5. Набор скоростей для выбранной точки робота

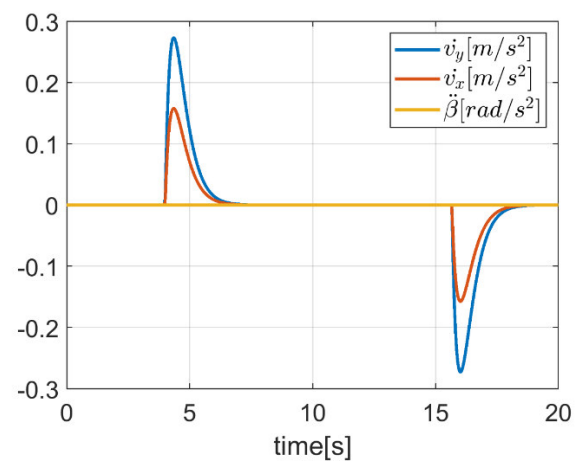


Рис. 6. Набор ускорений для выбранной точки робота

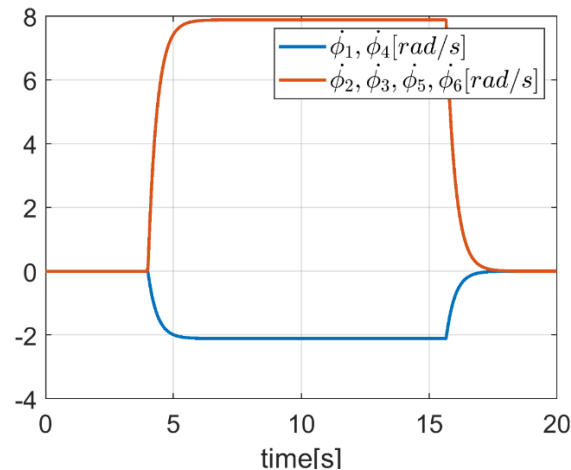


Рис. 7. Поведение угловых скоростей колес

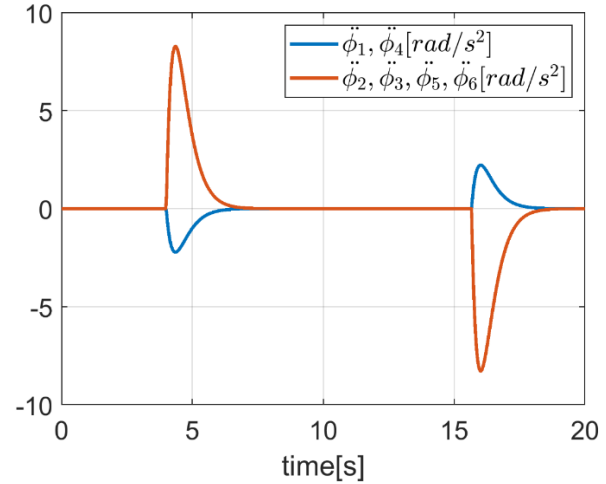


Рис. 8. Поведение угловых ускорений колес

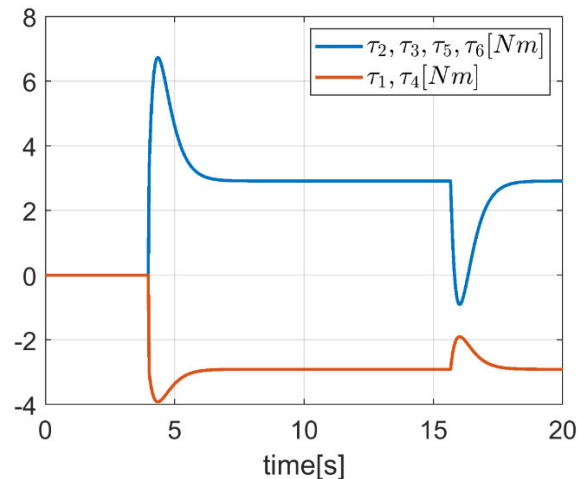


Рис. 9. Поведение приводных моментов колес

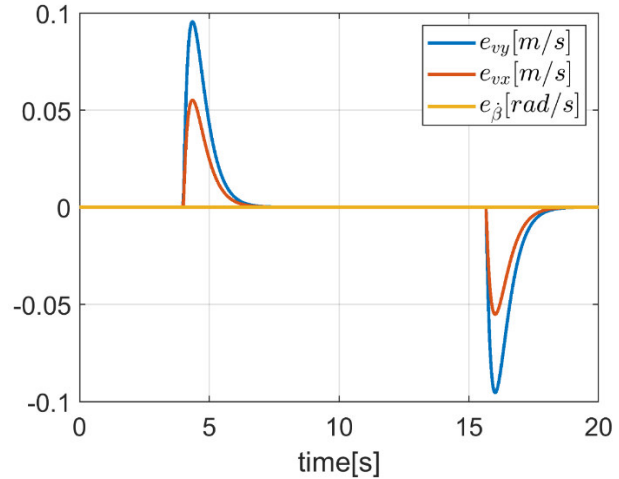


Рис. 10. Ошибка скорости

2. Движение по криволинейной траектории

Рисунок 11 показывает смоделированную криволинейную траекторию.

На рисунке 13 показано, как ведет себя набор ускорений выбранной точки робота: $\dot{v}_x(t)$, $\dot{v}_y(t)$, $\dot{\beta}(t)$.

На рисунке 12 показано, как ведет себя набор скоростей для выбранной точки робота: $v_x(t)$, $v_y(t)$, $\beta(t)$.

Рисунки 14 и 15 иллюстрируют решение задачи обратной кинематики: поведение угловых скоростей и угловых ускорений отдельных колес.

На рисунке 16 показано решение задачи обратной динамики: поведение приводных моментов отдельных колес.

Рисунок 17 демонстрирует величину ошибки между эталонной скоростью и скоростью, полученной в модели прямой динамики.

Из рисунков 10 и 17 видно, что ошибки очень малы. Они проявляются только в переходных процессах, когда скорость изменяется. По-

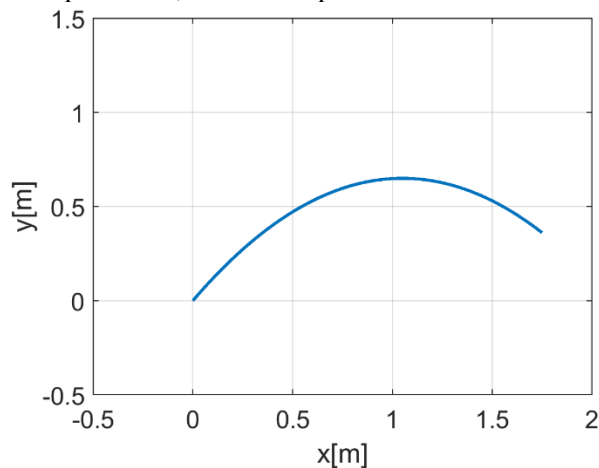


Рис. 11. Сымитированная криволинейная траектория

что их нет, когда скорость постоянна, что подтверждает правильность полученных результатов.

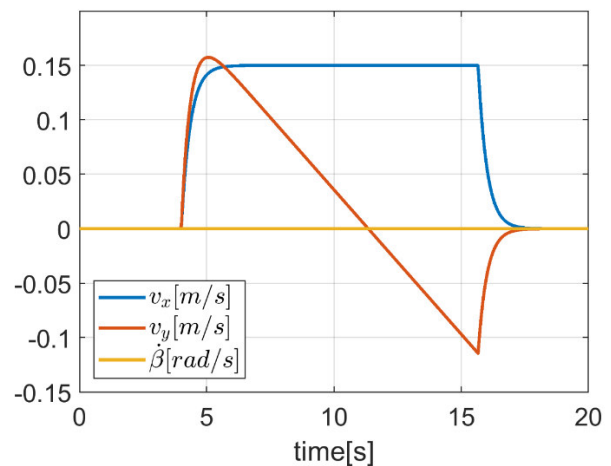


Рис. 12. Набор скоростей для выбранной точки робота

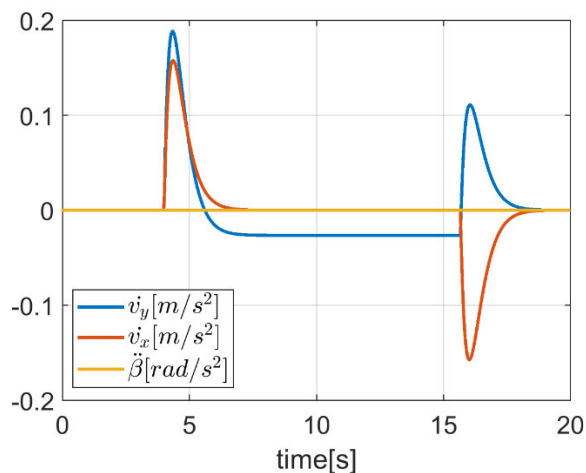


Рис. 13. Набор ускорений для выбранной точки робота

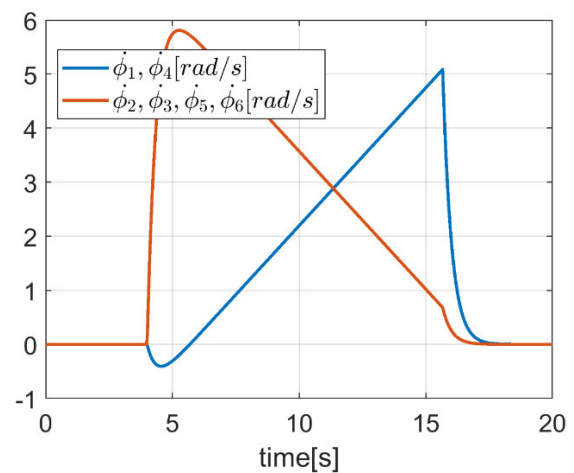


Рис. 14. Поведение угловых скоростей колес

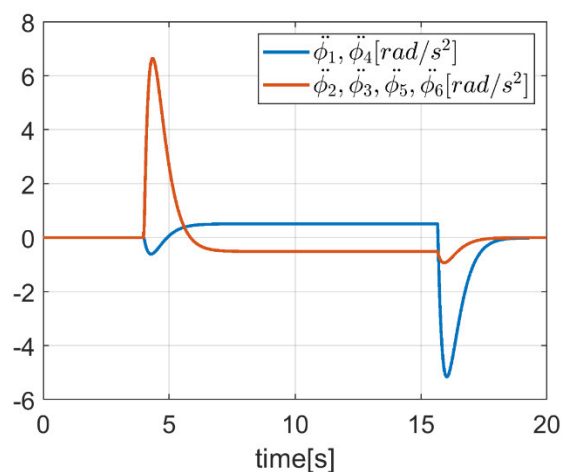


Рис. 15. Поведение угловых ускорений колес

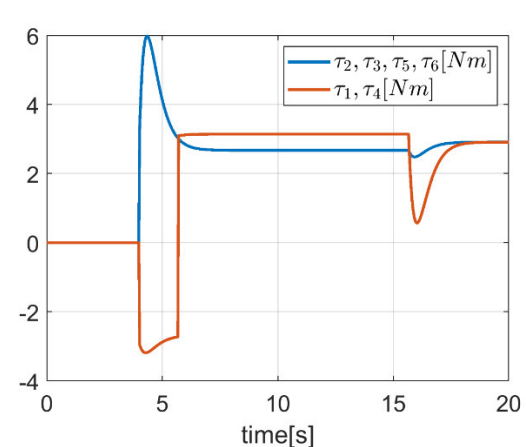


Рис. 16. Поведение приводных моментов колес

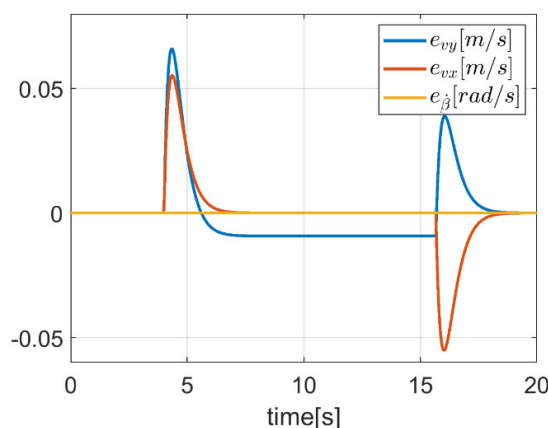


Рис. 17. Ошибка скорости

Вывод.

В рамках данного исследования была разработана динамическая модель мобильного робота с шестью колесами Илона. Модель была построена на основе уравнений Лагранжа второго рода с использованием множителей. Для проверки корректности модели было проведено численное моделирование в среде Matlab Simulink, включающее движение робота по двум траекториям: прямолинейной и криволинейной.

Результаты моделирования показали:

1. На прямолинейной траектории наблюдались разные знаки приводных моментов колес после стабилизации скорости: моменты τ_2 , τ_3 , τ_5 , τ_6 были положительными, а τ_1 , τ_4 – отрицательными.

2. На криволинейной траектории все знаки моментов были положительными после стабилизации скорости.

Данный результат демонстрирует, что прямолинейное движение способствует снижению отрицательных эффектов трения на колеса. Дополнительно, малые значения ошибки скорости подтвердили точность и корректность предложенной модели.

Разработанная модель может быть использована в будущем для проектирования и управления мобильными роботами в условиях, требующих высокой маневренности.

В перспективе дальнейшие исследования могут быть направлены на разработку обобщенной модели мобильных платформ с шестью колесами Илона, включающей различные геометрические конфигурации, такие как круг, овал и прямоугольник. Такой подход позволит избежать необходимости проведения отдельных исследований для каждой возможной конструкции и обеспечит возможность их сопоставления с точки зрения динамических характеристик. Кроме того, перспективным направлением является оптимизация геометрических параметров платформы и численный анализ её поведения в сравнении с традиционными прямоугольными платформами, представленными в работах [13]-

[14]. Это позволит глубже понять преимущества различных конфигураций и повысить эффективность проектирования мобильных роботов.

Таблица 1

Список обозначений

АУТС	Автоматически управляемые транспортные средства
O, x_i, y_i, z_i	система координат
δ	угол между осью колеса и осью качения [рад]
α	угол между осью x_i и осью колеса a [рад]
$\dot{\phi}$	угловая скорость колеса Илона [рад/с]
r	расстояние между осью колеса и землей [м]
v_x	скорость центра робота (O) в направлении x [м/с]
v_y	скорость центра робота (O) в направлении y [м/с]
$\dot{\beta}$	угловая скорость робота [рад/с]
a_x, a_y	координаты центра колеса [м]
O	центр массы робота
R	радиус платформы робота [м]
q	вектор обобщенных координат
Q	вектор обобщенных сил
L	кинетический потенциал системы [кг·м ² ·с ⁻²]
E	полная кинетическая энергия системы [кг·м ² ·с ⁻²]
U	потенциальная энергия системы [кг·м ² ·с ⁻²]
E_p	кинетическая энергия платформы [кг·м ² ·с ⁻²]
E_w	кинетическая энергия колес Илона [кг·м ² ·с ⁻²]
m_p	масса платформы [кг]
I_p	массовый момент инерции платформы робота [кг·м ²]
m_w	масса колеса Илона [кг]
I_w	массовый момент инерции колес Илона относительно оси вращения колеса [кг·м ²]
I_{wzL}	массовый момент инерции колеса Илона относительно оси e_z , проходящей через точку o [кг·м ²]
m_{pc}	масса робота [кг]
I_{pc}	массовый момент инерции робота [кг·м ²]
τ	крутящий момент двигателя колеса [кг·м ² ·с ⁻²]
G_p	вес платформы мобильного робота [кг·м·с ⁻²]
G_i	вес i-го колеса Илона [кг·м·с ⁻²]
μ	коэффициент сухого трения
f	коэффициент трения качения [м]
T	сила сухого трения [кг·м·с ⁻²]
N	сила давления [кг·м·с ⁻²]
D	работа системы сил [кг·м ² ·с ⁻²]
RF	реакционная сила [кг·м·с ⁻²]
P	мощность обобщенных сил [кг·м ² ·с ⁻³]

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Chawla V.K., Chanda A.K., Angra S. The scheduling of automatic guided vehicles for the workload balancing and travel time minimization in the flexible manufacturing system by the nature-inspired algorithm // *Journal of Project Management*. 2019. Vol. 4. Pp. 19–30. DOI: 10.5267/j.jpm.2018.8.001.
2. Du L.Z., Ke S.F., Wang Z., Tao J., Yu L.Q., Li H.J. Research on multi-load AGV path planning of weaving workshop based on time priority // *Mathematical Biosciences and Engineering*. 2019. Vol. 16. Pp. 2277–2292. DOI: 10.3934/mbe.2019113.
3. Chen C., Huy D.T., Tiong L.K., Chen I.M., Cai Y.Y. Optimal facility layout planning for AGV-based modular prefabricated manufacturing system // *Automation in Construction*. 2019. Vol. 98. Pp. 310–321. DOI: 10.1016/j.autcon.2018.08.008.
4. Chen C., Tiong L.K., Chen I.M. Using a genetic algorithm to schedule the space-constrained AGV-based prefabricated bathroom units manufacturing system // *International Journal of Production Research*. 2019. Vol. 57. Pp. 3003–3019. DOI: 10.1080/00207543.2018.1521532.
5. Dehnavi-Arani S., Saidi-Mehrabad M., Ghezavati V. An integrated model of cell formation and scheduling problem in a cellular manufacturing system considering automated guided vehicles' movements // *International Journal of Operations Research*. 2019. Vol. 34. Pp. 542–561. DOI: 10.1504/IJOR.2019.099108.
6. Abdelrahman M., Zeidis I., Bondarev O., Adamov B., Becker F., Zimmermann K. A description of the dynamics of a four-wheel mecanum mobile system as a basis for a platform concept for special purpose vehicles for disabled persons // 58th Ilmenau Scientific Colloquium, Ilmenau University of Technology. 2014. 10 p.
7. Hendzel Z., Rykała Ł. Modeling of Dynamics of a Wheeled Mobile Robot with Mecanum Wheels with the use of Lagrange Equations of the Second Kind // *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2017. №22(1). Pp. 81–99. DOI: 10.1515/ijame-2017-0005.
8. Hendzel Z., Rykała Ł. Description of kinematics of a wheeled mobile robot with mecanum wheels // *Modeling in Engineering*. 2015. №26(57). Pp. 5–12.
9. Wampfler G., Salecker M., Wittenburg J. Kinematics, dynamics, and control of omnidirectional vehicles with mecanum wheels // *Mechanics of Structures and Machines*. 1989. Vol. 17(2). Pp. 165–177. DOI: 10.1080/15397738909412814.
10. Shafiq M., Imran A., Maznoor S., Majeed A., Ahmed B., Khan I. Real-time navigation of mecanum wheel-based mobile robot in a dynamic environment // *Heliyon*. 2024. Vol. 10. e26829. DOI: 10.1016/j.heliyon.2024.e26829.
11. Racz S.-G., Crenganis M., Breaz R.-E., Maros,an A., Bârsan A., Gîrjob C.-E., Biris C.-M., Tera M. Mobile Robots—AHP-Based Actuation Solution Selection and Comparison between Mecanum Wheel Drive and Differential Drive with Regard to Dynamic Loads // *Machines*. 2022. Vol. 10. 886. DOI: 10.3390/machines10100886.
12. Leng J., Mou H., Tang J., Li Q., Zhang J. Design, Modeling, and Control of a New Multi-Motion Mobile Robot Based on Spoked Mecanum Wheels // *Biomimetics*. 2023. Vol. 8. 183. DOI: 10.3390/biomimetics8040183.
13. Typiak A., Łopatka M.J., Rykała Ł., Kijek M. Dynamics of Omnidirectional Unmanned Rescue Vehicle with Mecanum Wheels // *AIP Conference Proceedings*. 2018. Vol. 1922. Pp. 120005–10. DOI: 10.1063/1.5019120.
14. Tian Y., Zhang S., Liu J., Chen F., Li L., Xia B. Research on a new omnidirectional mobile platform with heavy loading and flexible motion // *Advances in Mechanical Engineering*. 2017. Vol. 9(9). Pp. 1–15. DOI: 10.1177/1687814017726683.
15. Шбани А., Волков А.Н., Кочнева О.В., Алван Х.М. Разработка кинематической модели для мобильного робота с шестью колесами Илона // *Наука и бизнес: пути развития*. 2022. №10(136). С. 160–166.
16. Шбани А., Алван Х.М., Кочнева О.В., Волков А.Н. Разработка контроллера обратного шага для мобильного робота с шестью колесами Илона // *Наука и бизнес: пути развития*. 2023. №2(140). С. 55–60.

Информация об авторах

Шбани Али, аспирант высшей школы автоматизации и робототехники. E-mail: ali.shbani951@gmail.com. Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого. Россия, 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29 литера Б.

Алван Хасан Мохаммед, кандидат технических наук, доцент высшей школы автоматизации и робототехники. E-mail: hassan.m.alwan@uotechnology.edu.iq. Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого. Россия, 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29 литера Б.

Поступила 13.12.2024 г.

© Шбани А., Алван Х.М., 2025

*Shbani A., Alwan H.M.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

*E-mail: ali.shbani951@gmail.com

DEVELOPMENT OF A DYNAMIC MODEL FOR A MOBILE ROBOT WITH SIX MECANUM WHEELS

Abstract. This study focuses on the analysis of a mobile robot with six Mecanum wheels. Among all ground transportation systems, the robot equipped with Mecanum wheels possesses exceptional maneuverability and operates effectively in warehouse environments requiring precise control and high mobility. This type of robot was chosen as the research object for its combination of versatility and simplicity in implementation.

The goal of this work is to develop a dynamic model of a mobile robot with six Mecanum wheels, enabling motion analysis and control. To achieve this, the following tasks were undertaken: a critical review of existing scientific and technical sources, the development of the robot's dynamic model, and its computer simulation. The dynamic equations were derived using Lagrange's equations of the second kind, accounting for the key parameters of motion.

The mobile robot is considered a planar mechanism capable of linear and angular movement on a horizontal plane. It is assumed that motion occurs under the condition of pure rolling of the wheels without slipping. The dynamic model was validated through simulation of motion along two trajectories: straight and curved. The simulation results demonstrated the high accuracy of the proposed model, as confirmed by the small velocity error values.

Keywords: Dynamic robot modeling, Mobile robot, Mecanum wheel, Mobile system navigation, Robot motion analysis.

REFERENCES

1. Chawla V.K., Chanda A.K., Angra S. The scheduling of automatic guided vehicles for the workload balancing and travel time minimization in the flexible manufacturing system by the nature-inspired algorithm. *Journal of Project Management*. 2019. Vol. 4. Pp. 19–30. DOI: 10.5267/j.jpm.2018.8.001.
2. Du L.Z., Ke S.F., Wang Z., Tao J., Yu L.Q., Li H.J. Research on multi-load AGV path planning of weaving workshop based on time priority. *Mathematical Biosciences and Engineering*. 2019. Vol. 16. Pp. 2277–2292. DOI: 10.3934/mbe.2019113.
3. Chen C., Huy D.T., Tiong L.K., Chen I.M., Cai Y.Y. Optimal facility layout planning for AGV-based modular prefabricated manufacturing system. *Automation in Construction*. 2019. Vol. 98. Pp. 310–321. DOI: 10.1016/j.autcon.2018.08.008.
4. Chen C., Tiong L.K., Chen I.M. Using a genetic algorithm to schedule the space-constrained AGV-based prefabricated bathroom units manufacturing system. *International Journal of Production Research*. 2019. Vol. 57. Pp. 3003–3019. DOI: 10.1080/00207543.2018.1521532.
5. Dehnavi-Arani S., Saidi-Mehrabad M., Ghezavati V. An integrated model of cell formation and scheduling problem in a cellular manufacturing system considering automated guided vehicles' movements. *International Journal of Operations Research*. 2019. Vol. 34. Pp. 542–561. DOI: 10.1504/IJOR.2019.099108.
6. Abdelrahman M., Zeidis I., Bondarev O., Adamov B., Becker F., Zimmermann K. A description of the dynamics of a four-wheel mecanum mobile system as a basis for a platform concept for special purpose vehicles for disabled persons. 58th Ilmenau Scientific Colloquium, Ilmenau University of Technology. 2014. 10 p.
7. Hendzel Z., Rykała Ł. Modeling of Dynamics of a Wheeled Mobile Robot with Mecanum Wheels with the use of Lagrange Equations of the Second Kind. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2017. No. 22(1). Pp. 81–99. DOI: 10.1515/ijame-2017-0005.
8. Hendzel Z., Rykała Ł. Description of kinematics of a wheeled mobile robot with mecanum wheels. *Modeling in Engineering*. 2015. No. 26(57). Pp. 5–12.
9. Wampfler G., Salecker M., Wittenburg J. Kinematics, dynamics, and control of omnidirectional vehicles with mecanum wheels. *Mechanics of Structures and Machines*. 1989. Vol. 17(2). Pp. 165–177. DOI: 10.1080/15397738909412814.
10. Shafiq M., Imran A., Maznoor S., Majeed A., Ahmed B., Khan I. Real-time navigation of mecanum wheel-based mobile robot in a dynamic environment. *Heliyon*. 2024. Vol. 10. e26829. DOI: 10.1016/j.heliyon.2024.e26829.
11. Racz S.-G., Crenganis M., Breaz R.-E., Maros,an A., Bârsan A., Gîrjob C.-E., Biris C.-M., Tera M. Mobile Robots—AHP-Based Actuation Solution Selection and Comparison between Mecanum Wheel Drive and Differential Drive with Regard to Dynamic Loads. *Machines*. 2022. Vol. 10. 886. DOI: 10.3390/machines10100886.

12. Leng J., Mou H., Tang J., Li Q., Zhang J. Design, Modeling, and Control of a New Multi-Motion Mobile Robot Based on Spoked Mecanum Wheels. *Biomimetics*. 2023. Vol. 8. 183. DOI: 10.3390/biomimetics8040183.

13. Typiak A., Łopatka M.J., Rykała L., Kijek M. Dynamics of Omnidirectional Unmanned Rescue Vehicle with Mecanum Wheels. *AIP Conference Proceedings*. 2018. Vol. 1922. Pp. 120005–10. DOI: 10.1063/1.5019120.

14. Tian Y., Zhang S., Liu J., Chen F., Li L., Xia B. Research on a new omnidirectional mobile platform with heavy loading and flexible motion. *Advances in Mechanical Engineering*. 2017. Vol. 9(9). Pp. 1–15. DOI: 10.1177/1687814017726683.

15. Shbani A., Volkov A.N., Kochneva O.V., Alwan H.M. Development of a kinematic model for a mobile robot with six Elon's wheels [Razrabotka kinematicheskoy modeli dlya mobil'nogo robota s shest'yu kolesami Ilona]. *Science and business: paths of development*. 2022. No. 10(136). Pp. 160–166. (rus)

16. Shbani A., Alwan H.M., Kochneva O.V., Volkov A.N. Development of a backstepping controller for a mobile robot with six Elon's wheels [Razrabotka kontrollera obratnogo shaga dlya mobil'nogo robota s shest'yu kolesami Ilona]. *Science and business: paths of development*. 2023. No. 2(140). Pp. 55–60. (rus)

Information about the authors

Shbani, Ali Postgraduate student. E-mail: ali.shbani951@gmail.com. Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University. Russia, 195251, Saint Petersburg, Politekhnikeskaya st., 29, building B.

Alwan, Hassan M. PhD, Assistant professor. и. E-mail: hassan.m.alwan@uotechnology.edu.iq. Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University. Russia, 195251, Saint Petersburg, Politekhnikeskaya st., 29, building B.

Received 13.12.2024

Для цитирования:

Шбани А., Алван Х.М. Разработка динамической модели для мобильного робота с шестью колесами Илона // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2025. № 9. С. 89–103. DOI: 10.34031/2071-7318-2025-10-9-89-103

For citation:

Shbani A., Alwan H.M. Development of a dynamic model for a mobile robot with six mecanum wheels. *Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov*. 2025. No. 9. Pp. 89–103. DOI: 10.34031/2071-7318-2025-10-9-89-103