DOI: 10.12737/article_59a93b0ee30d69.60495400

Петраков А.А., канд. техн. наук, доц.
Национальный исследовательский московский государственный строительный университет

РАСЧЕТ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ РАЗНОМОДУЛЬНОГО НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО МАТЕРИАЛА ШАГОВЫМ МЕТОДОМ С ПОМОЩЬЮ МАТРИЦЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

alekpetrakov@mail.ru

В работе выведены нелинейные дифференциальные уравнения для оболочек вращения из нелинейных разномодульных материалов. Упругие постоянные для материала определяются из шести условий, первые четыре из которых выражают равенство пределов прочности экспериментальной и аппроксимирующей диаграмм в растянутой и сжатой зонах при одноосном напряженном состоянии и двухосном равномерном растяжении и сжатии, пятое – равенство пределов прочности при сдвиге и последнее – равенство предельной деформации экспериментальной и аппроксимирующей диаграмм в сжатой зоне. Решение полученных нелинейных дифференциальных уравнений сведено при помощи модифицированного метода последовательных нагружений к решению линейных дифференциальных уравнений. Линейные дифференциальные уравнения решены с помощью матрицы дифференцирования. Получена матрица дифференцирования для неравномерного шага. Произведено сопоставление расчетов с разными матрицами дифференцирования и показана лучшая сходимость в случае применения матрицы дифференцирования с переменным шагом.

Ключевые слова: *оболочка вращения, нелинейный разномодульный материал, метод последовательных нагружений, матрица дифференцирования, неравномерный шаг.*

Будем рассматривать упругую, однородную и изотропную среду. В.В. Новожиловым [1, 2, 3] показано, что если сплошная среда обладает упругим потенциалом, то последний является функцией трех инвариантов тензора деформаций

$$U = U(J_1, J_2, J_3); \tag{1}$$

где U – упругий потенциал напряжений, J1, J2, J3 – инварианты тензора деформаций.

Разложим упругий потенциал в ряд по целым степеням инвариантов тензора деформаций. В результате этого потенциал приводится к виду

$$U = (AJ_1^2 + BJ_2) + (C_1J_1^3 + C_2J_1J_2 + C_3J_3) + (D_1J_1^4 + D_2J_2J_1^2 + D_3J_1J_3 + D_4J_2^2) + \dots, \tag{2}$$

где A, B, Ci, Dj – физические константы, определяемые на основе экспериментальных данных.

Учитывая выражения в первых двух скобках получим форму упругого потенциала, предложенную Л. Бриллуэном [4] и развитую Р.Д. Мурнаганом [5].

Аппроксимация экспериментальных зависимостей кубической параболой, что соответствует членам в первых трех скобках в выражении (2), достаточно точно отражает результаты опытов и позволяет получить сравнительно простые зависимости между напряжениями и деформациями. Учитывая это, принимаем упругий потенциал в виде

$$U = AJ_1^2 + BJ_2 + C_2J_1J_2 + C_3J_3 + D_2J_2J_1^2 + D_3J_1J_3 + D_4J_2^2. \tag{3}$$

Используя этот потенциал в работах [6] получена связь между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций для нелинейно-упругого разносопротивляющегося материала для плосконапряженного состояния

$$\sigma_{11} = \frac{2G}{1-\nu_0}\Bigg\{(\varepsilon_{11} + \nu_0\varepsilon_{22}) + A_1\left[\frac{\varepsilon_{12}^2}{4} + \varepsilon_{11}^2 - (\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})^2\frac{1-\nu_0+\nu_0^2}{3(1-\nu_0)^2}\right] + A_2\left[\frac{\varepsilon_{12}^2}{4} + \varepsilon_{11}^2 + (\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})^2\frac{\nu_0}{(1-\nu_0)^2}\right] +$$
$$+ B_1\left[2\varepsilon_{11}(1-\nu_0+\nu_0^2) - \varepsilon_{22}(1-4\nu_0+\nu_0^2)\right]\left[(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})^2\frac{1-\nu_0+\nu_0^2}{3} + (\varepsilon_{12}^2 - 4\varepsilon_{11}\varepsilon_{22})\right] +$$
$$+ B_2(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})\left[(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})^2\frac{(1+\nu_0)^2}{(1-\nu_0)^2} + 3(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})\varepsilon_{11} + 1{,}5(\varepsilon_{12}^2 - 4\varepsilon_{11}\varepsilon_{22})\right] +$$
$$+ B_3(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})\left[(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})\varepsilon_{11} + (\varepsilon_{12}^2 - 4\varepsilon_{11}\varepsilon_{22})/2 - (\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})^2\frac{(1+\nu_0)^2}{9(1-\nu_0)^2}\right]\Bigg\};$$

$$\sigma_{12} = G\varepsilon_{12}\{1+(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})\frac{A_1+A_2}{1-\nu_0}+(\varepsilon_{12}^2-4\varepsilon_{11}\varepsilon_{22})/2+\frac{(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})^2}{1-\nu_0}\left[3B_2+B_1(1-\nu_0+\nu_0{}^2)+B_3\right]\}. \quad (3)$$

Здесь G – модуль сдвига, ν0 – начальный коэффициент Пуассона, A1, A2, B1, B2, B3, – упругие постоянные которые определяются из шести условий, первые четыре из которых выражают равенство пределов прочности экспериментальной и аппроксимирующей диаграмм в растянутой и сжатой зонах при одноосном напряженном состоянии и двухосном равномерном растяжении и сжатии, пятое – равенство пределов прочности при сдвиге и последнее – равенство предельной деформации экспериментальной и аппроксимирующей диаграммы[7].

Рассмотрим сферическую оболочку для интегрирования нелинейной системы дифференциальных уравнений применим метод последовательных нагружений. В.В. Петров [8] доказал, что уравнения метода последовательных нагружений представляют собой дифференциал Фреше исходных уравнений.

Так как нелинейными исходными уравнениями являются только физические уравнения (3) можно сразу лианизировать эти уравнения, продифференцровав по Фреше, и при выводе разрешающих дифференцирующих уравнений пользоваться уже линейными относительно приращений перемещений Δu и Δw уравнениями.

В результате приходим к линейным дифференциальным уравнениям[6].

$$\begin{gathered}\Delta u c_{10}+\Delta u' c_{11}+\Delta u'' c_{12}+\Delta w d_{10}+\Delta w' d_{11}+\Delta w'' d_{12}+\Delta w''' d_{13}+\frac{q_x}{12\eta^2}=0;\\ \Delta u c_{20}+\Delta u' c_{21}+\Delta u'' c_{22}+\Delta u''' c_{23}+\Delta w d_{20}+\Delta w' d_{21}+\Delta w'' d_{22}+\Delta w''' d_{23}+\Delta w'^{v} d_{24}+\frac{q_z}{12\eta^2}=0.\end{gathered} \quad (4)$$

Процесс расчета сводится к решению системы линейных дифференциальных уравнений, коэффициенты которой, а также правые части зависят от шага нагрузки [6]. С помощью матрицы, дифференцирования от системы дифференциальных уравнений приходим к матичным выражениям.

Для одномерной задачи при делении оси на n участков формула численного дифференцирования может быть записана применительно к некоторой обобщенной функции w, в следующем виде

$$\{w'\}_n = \{d_0\}_n w_0' + [D]_{n,n+1}\{w\}_{n+1}. \quad (5)$$

Здесь матрицы $\{d\}_n$ и $\{D\}_{n,n+1}$ аналогичны матрицам дифференцирования А.В. Александрова [9, 10].

В систему дифференциальных уравнений (4) входят производные до четвертой степени включительно. Из формулы (5) после простых преобразований получаем матричные выражения для высших производных.

$$\begin{gathered}\{w''\}_{n+1}=\{d_0\}_{n+1}w_0''+\{d_1\}_{n+1}w_0'+\left[D^2\right]_{n+1,n+1}\{w\}_{n+1};\\ \{w'''\}_{n+1}=\{d_0\}_{n+1}w_0'''+\{d_1\}_{n+1}w_0''+\{d_2\}_{n+1}w_0'+\left[D^3\right]_{n+1,n+1}\{w\}_{n+1};\\ \{w'^{v}\}_{n+1}=\{d_0\}_{n+1}w_0'^{v}+\{d_1\}_{n+1}w_0'''+\{d_2\}_{n+1}w_0''+\{d_3\}_{n+1}w_0'+\left[D^4\right]_{n+1,n+1}\{w\}_{n+1};\end{gathered} \quad (6)$$

где

$$\begin{gathered}\{d_i\}_{n+1}=[D]_{n+1,n+1}\{d_{i-1}\}_{n+1};\\ \left[D^i\right]_{n+1,n+1}=\left[D^{i-1}\right]_{n+1,n+1}[D]_{n+1,n+1}(i=1,...4).\end{gathered} \quad (7)$$

Учитывая полученные матричные выражения для дифференциальных операторов, систему уравнений (4) можно записать в матричной форме

$$\begin{gathered}(c_{10}+c_{11}[D]+c_{12}\left[D^2\right])\{\Delta u\}+(c_{11}\{d_0\}+c_{12}\{d_1\})\Delta u_0'+c_{12}\{d_0\}\Delta u_0''+\\ +(d_{10}+d_{11}[D]+d_{12}\left[D^2\right]+d_{13}\left[D^3\right])\{\Delta w\}+\\ +(d_{11}\{d_0\}+d_{12}\{d_1\}+d_{13}\{d_2\})\Delta w_0'+(d_{12}\{d_0\}+d_{13}\{d_1\})\Delta w_0''+d_{13}\{d_0\}\Delta w_0'''+\{q_x\}12\eta^2=0;\\ (c_{20}+c_{21}[D]+c_{22}\left[D^2\right]+c_{23}\left[D^3\right])\{\Delta u\}+(c_{21}\{d_0\}+c_{22}\{d_1\}+c_{23}\{d_2\})\Delta u_0'+(c_{22}\{d_0\}+c_{23}\{d_1\})\Delta u_0''+\\ +c_{23}\{d_0\}\Delta u_0'''+(d_{20}+d_{21}[D]+d_{22}\left[D^2\right]+d_{23}\left[D^3\right]++d_{24}\left[D^4\right])\{\Delta w\}+\\ +(d_{21}\{d_0\}+d_{22}\{d_1\}+d_{23}\{d_2\}+d_{24}\{d_3\})\Delta w_0'+(d_{22}\{d_0\}+d_{23}\{d_1\}+d_{24}\{d_2\})\Delta w_0''+\\ +(d_{23}\{d_0\}+d_{24}\{d_1\})\Delta w_0'''+d_{24}\{d_0\}\Delta w_0'^{v}+\{q_z\}12\eta^2=0.\end{gathered} \quad (8)$$

К полученным 2(n+1) уравнениям следует добавить граничные условия, записанные также в матричной форме.

Для шарнирно неподвижного края в n точке

$$\Delta u_n=0; \Delta w_n=0; \Delta M_1=0. \quad (9)$$

В случае защемленного края оболочки граничные условия в n
точке будут

$$\Delta u_n = 0; \Delta w_n = 0; \{d_0\}\Delta w_0' + [D]\{\Delta w\} = 0. \quad (10)$$

Для замкнутой оболочки при n = 0 получим

$$\Delta u_n = 0; \Delta w_0' = 0; \Delta w_0''' = 0. \quad (11)$$

Матрицу дифференцирования можно построить разными способами: с помощью сплайнов, или прибегнуть к аппроксимации функции и ее производной полиномами.

А.В. Александров вывел [9] матрицу дифференцирования {d} и {D} для равномерного шага. Однако рациональнее принять шаг неравномерным, выбирая его в зависимости от гладкости функций.

Для построения матрицы дифференцирования для неравномерного шага проводим параболу n+1-го порядка через точки y_0, y_1, …y_n с заданной производной в точке 0 y_0' Искомая функция при этом аппроксимируется многочленом n -й степени У(x), удовлетворяющим условиям У(x_k) = y(x_k) = y_k в n +2 точках интерполяции x_k (k = -1, 0, 1, … n). Неизвестное значение y в точке k = -1 определяется через производную y_0' в точке k = 0.

Воспользуемся интерполяционной формулой Лагранжа [11]

$$Y_{(x)} = \frac{\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)}{\prod_{k=0}^{n}(x_{-1}-x_k)} y_{-1} + \frac{\prod_{k=-1,1}^{n}(x-x_k)}{\prod_{k=-1,1}^{n}(x_0-x_k)} y_0 + \ldots + \frac{\prod_{k=-1}^{n-1}(x-x_k)}{\prod_{k=-1}^{n-1}(x_n-x_k)} y_n. \quad (12)$$

Продифференцируем выражение для У(x)

$$\frac{dY}{dx} = \frac{\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(x-x_k)}}{\prod_{k=0}^{n}(x_{-1}-x_k)} y_{-1} + \frac{\prod_{k=-1,1}^{n}(x-x_k)\sum_{k=-1,1}^{n}\frac{1}{(x-x_k)}}{\prod_{k=-1,1}^{n}(x_0-x_k)} y_0 + \frac{\prod_{k=-1}^{n-1}(x-x_k)\sum_{k=-1}^{n-1}\frac{1}{(x-x_k)}}{\prod_{k=-1}^{n-1}(x_n-x_k)} y_n. \quad (13)$$

Для определения значения y_{-1} запишем производную У′ в точке x_0 = 0 и приравниваем к y_0'. Тогда имеем

$$\frac{y_{-1}}{\prod_{k=0}^{n}(x_{-1}-x_k)} = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n}(-x_k)} y_0' - \frac{\prod_{k=-1,1}^{n}(-x_k)\sum_{k=-1,1}^{n}\frac{1}{(-x_k)}}{\prod_{k=-1,1}^{n}(x_0-x_k)\prod_{k=0}^{n}(-x_k)} y_0 - \ldots - \frac{\prod_{k=-1}^{n-1}(-x_k)}{\prod_{k=-1}^{n-1}(x_n-x_k)\prod_{k=0}^{n}(-x_k)} y_n. \quad (14)$$

После преобразований формула () принимает вид

$$\frac{y_{-1}}{\prod_{k=0}^{n}(x_{-1}-x_k)} = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n}(-x_k)} y_0' - \frac{x_{-1}\sum_{k=-1,1}^{n}\frac{1}{(-x_k)}}{\prod_{k=-1,1}^{n}(x_0-x_k)} y_0 - \frac{x_{-1}}{\prod_{k=-1,0,2}^{n}(x_1-x_k)x_k} y_1 - \ldots - \frac{x_{-1}}{\prod_{k=-1}^{n-1}(x_n-x_k)x_n} y_n. \quad (15)$$

Подставляя () в () получаем

$$\frac{dY}{dx} = \frac{\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(x-x_k)}}{\prod_{k=1}^{n}(-x_k)} y_0' + \frac{\left[\prod_{k=-1,1}^{n}(x-x_k)\sum_{k=-1,1}^{n}\frac{1}{(x-x_k)} - \prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(x-x_k)}x_{-1}\right]}{\prod_{k=-1,1}^{n}(x_0-x_k)} y_0 +$$
$$\ldots + \frac{\left[\prod_{k=-1}^{n-1}(x-x_k)\sum_{k=-1}^{n-1}\frac{1}{(x-x_k)} - \prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(x-x_k)}\frac{x_{-1}}{x_n}\right]}{\prod_{k=-1}^{n-1}(x_0-x_k)} y_n. \quad (16)$$

После простых преобразований получим

$$\frac{dY}{dx}=\frac{\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(x-x_k)}}{\prod_{k=1}^{n}(-x_k)}y_0^{'}+\frac{\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)\left[\sum_{1}^{n}\frac{x}{x-x_k}\left(\frac{1}{x}+\sum_{1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)+\sum_{1}^{n}\frac{1}{x_k}\right]}{\prod_{k=1}^{n}(x_0-x_k)}y_0+$$

$$+\prod_{k=0,2}^{n}(x-x_k)\left[\sum_{k=0,2}^{n}\frac{x}{x-x_k}+1\right]y_1+\ldots+\prod_{k=0}^{n-1}(x-x_k)\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x}{x-x_k}+1\right]y_n. \quad (17)$$

С помощью формулы (17) можно написать матричную формулу численного дифференцирования при переменном шаге разбиения

$$\begin{Bmatrix} y_0^{'} \\ y_1^{'} \\ . \\ . \\ . \\ y_n^{'} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ . \\ . \\ . \\ d_n \end{Bmatrix}y_0^{'}+\begin{vmatrix} 0,0,\ldots 0 \\ d_{10},d_{11},\ldots d_{1n} \\ . \\ . \\ . \\ d_{n0},d_{n2},\ldots d_{nn} \end{vmatrix}\begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{Bmatrix}; \quad (18)$$

Или

$$\{y'\}_{n+1}=\{d\}_{n+1,1}y_0^{'}+[D]_{n+1,n+1}\{y\}_{n+1}. \quad (19)$$

Где элементы вектора {d} и {D} вычисляются по формулам

$$d_i=\frac{\prod_{k=0;k\neq i}^{n}(x_i-x_k)}{\prod_{k=1}^{n}(-x_k)};(i=0,1,\ldots n);$$

$$d_{ij}=\frac{x_i\prod_{k=0;k\neq i,k\neq j}^{n}(x_i-x_k)}{x_j\prod_{k=0:k\neq j}^{n}(x_j-x_k)};(i=1,2,\ldots n;j=1,2,\ldots n;i\neq j);$$

$$d_{ii}=\frac{1}{x_i}+\sum_{o;k\neq i}^{n}\frac{1}{x_i-x_k};(i=1,2,\ldots n); \quad (20)$$

$$d_{0j}=0;(j=0,1,\ldots n);$$

$$d_{i0}=\frac{\prod_{k=0;k\neq i}^{n}(x_i-x_k)x_i}{\prod_{k=1}^{n}(x_0-x_k)}\left(\frac{1}{x_i}+\sum_{1}^{n}\frac{1}{x_k}\right);(i=1,2,\ldots n);$$

При равномерном шаге матрица дифференцирования получается такой же, как у А.В. Александрова [9].

Рассмотрим для сравнения три матрицы дифференцирования:

1. матрицу дифференцирования, полученную с помощью кубических сплайнов,

2. матрицу дифференцирования А.В. Александрова [9] для равномерного шага,

3. матрицу дифференцирования, полученную выше для неравномерного шага (п = 6).

Результаты расчета замкнутой сферической оболочки с жестко защемленным опорным контуром под действием нормальной равномерно распределенной нагрузки (η = 100, $0^0 \leq ß \leq 30^0$) даны в таблице 1.

Значения сравниваются с точным решением, полученным И.С. Ахмедьяновым [12. 13. 14. 15] (4 столбик таблицы).

Таблица 1

Сравнение матриц дифференцирования

ß	Методы решения						
	1	%	2	%	3	%	4
	Изгибающие моменты						
12					- 0,00487	8	- 0,00448
15	- 0,03345	34	- 0,04617	8,7			
18					-0,12241	5,6	- 0,12968
20	-0,18679	0,9	- 0,18596	1,4			- 0,18853
24					-0,19537	2,1	- 0,19963
25	-0,15743	10,3	- 0,13114	8,1			- 0,14272
27					0,11287	4	0,10847
30	0,96670	0,1	0,96914	0,2	0,96991	0,2	0,96741
	Поперечная сила						
12					-0,00565	12	- 0,00504
15	-0,01138	4,4	- 0,01079	1			- 0,10908
18					- 0,01529	3	- 0,01576
20	- 0,01995	27	- 0,01462	0,1			- 0,01461
24					0,01768	0,1	0,01769
25	0,03911	8,7	0,03710	3			0,03598
27					0,08792	0,1	0,08798
30	0,19690	0,5	0,19726	0,3	0,19690	0,02	0,19785

Из сравнения результатов видно, что наибольшую точность дает матрица дифференцирования с неравномерным шагом. Ошибка в этом случае в зоне краевого эффекта меньше 4 %.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Л.–М. Гостехиздат, 1948. 211 С.

2. Новожилов В.В. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно-упругой среде // Прикладная математика и механика. 1951. Т. ХУ. Вып. 2. С. 183–194.

3. Новожилов В.В. Теория упругости. Л., Судпромгиз, 1958. 370 С.

4. Brillouin L. Les tenseurs en mtcanique et en elasticite. Hfris: Vasson, 1938. 370 H.

5. Murnaghan F.D. Finite deformation of an elastic solid. New York: Wiley, 1951. 140 H.

6. Петраков А.А. Расчет сферических оболочек с учетом физической нелинейности // Нелинейные задачи сопротивления материалов и прикладной теории упругости. Вып. 118. М., МИСИ. 1974 С. 65–69.

7. Петраков А.А. Определение характеристик нелинейно-упругих разносопротивляющихся материалов // Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы. Москва, МГСУ, 2014 С. 256–259.

8. Петров В.В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1975. 120 С.

9. Александров А.В. Численное решение линейных дифференциальных уравнений при помощи матрицы дифференцирования // Тр. МИИТ, М.: Трансжелдориздат, 1961, вып. 131, С. 253- 266.

10. Смирнов В.А. Численный метод решения некоторых краевых задач теории упругости для дифференциальных уравнений в частных производных // Исследования по теории сооружений. М.: Стройиздат, 1969. Вып. ХУII, С. 111-124.

11. Корн Г.А., Корн Т.М. Справочник по математике для научных работников. М.: Наука, 1974. 831 С.

12. Ахмедьянов И.С. Об одном методе интегрирования уравнений изгиба сферической оболочки при осесимметричном нагружении // Изв. вузов. Авиационная техника. 1962. № 3. С. 62–70.

13. Ахмедъянов И.С. К расчету тонких сферических оболочек при осесимметричном нагружении // Тр. КуАИ, 1963, вып. ХУII, С. 117–130.

14. Ахмедъянов И.С. Интегрирование неоднородных уравнений осесимметричного изгиба сферической оболочки // Известия вузов. Авиационная техника. 1966. № 4. С. 36–40.

15. Ахмедьянов И.С., Хазанов Х.С. Расчет сферических оболочек при осесимметричном нагружении. Куйбышев: Изд-во Куйбышевского авиационного института, 1967, 83 С.

Petrakov A.A.

THE CALCULATION OF SPHERICAL SHELLS OF BIMODULUS NONLINEAR ELASTIC MATERIAL OF STEPPER METHOD USING THE MATRIX DIFFERENTIATION

The paper presents nonlinear differential equations for shells of revolution of bimodulus nonlinear materials. Elastic constants for a material are determined from the six conditions, the first four of which Express the equality of strength of experimental and approximating diagrams in stretched and compressed zones under uniaxial stress and biaxial uniform tension and compression, the fifth equality of strength at the shift and the last equality is the limit of the deformation of experimental and approximating graphs in the compressed area. The solution of the resulting nonlinear differential equations is reduced by using the modified method of successive loadings to the solution of linear differential equations. Linear differential equations are solved using the matrix differentiation. The resulting matrix of differentiation for an uneven step. Made a comparison of calculations using different matrices of differentiation and shows the best convergence in case of the use of matrix differentiation with nonuniform step.

Keywords: *shell of revolution, the bimodulus nonlinear material, the method of successive loading, matrix differentiation, nonuniform step.*

Петраков Александр Андреевич, кандидат технических наук, доцент кафедры строительной и теоретической механики.
Национальный исследовательский московский государственный строительный университет
Адрес: Россия, Москва, Ярославское ш., д. 26.
E-mail: alekpetrakov@mail.ru