

Горлов А.С., канд. техн. наук, доц.,
Петрашев В.И., ст. преп.

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОФАЗНОЙ ЗАДАЧИ О ВЫСЫХАНИИ МАТЕРИАЛОВ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ВРЕМЕНИ

petrashev_v@mail.ru

В статье на основе классической задачи Стефана предложена математическая модель высыхания материалов с неискривлённой поверхностью и получено асимптотическое решение однофазной задачи при больших значениях времени высыхания.

Ключевые слова: температура, задача Стефана, теплота парообразования, удельная теплоёмкость, слой высохшего материала.

Введение. В таких отраслях промышленности как производство цемента, деревообработка, химическая промышленность и другие применяются процессы сушки материала. Управление такими процессами включает в себя расчёты их продолжительности, затрат тепловой и электрической энергии и, как следствие, себестоимости и рентабельности. Эти расчёты часто требуют оценки количества высохшего материала в зави-

симости от времени сушки, температурного режима, влажности материала или, наоборот, временных затрат для достижения нужного количества высохшего материала. Предлагаются формулы для таких оценок и способы их применения.

Физическая модель процесса. Рассмотрим сначала физическую модель процесса сушки – основу математической модели.

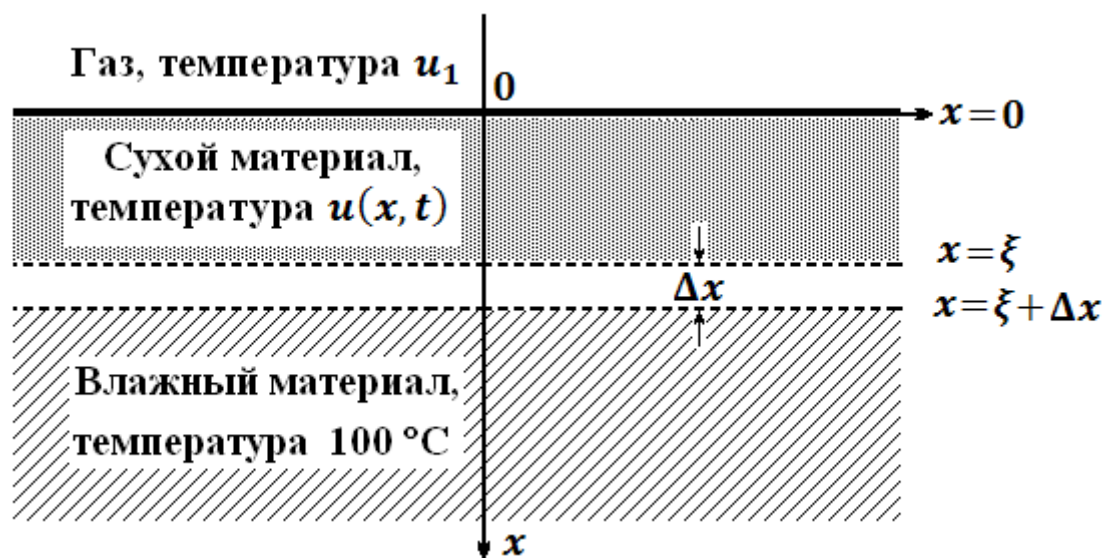


Рис. 1. К постановке задачи для неискривлённой поверхности

Процесс сушки будем рассматривать с того момента, когда интенсивное испарение воды с поверхности материала прекратилось, а в пар превращается только жидкость, находящаяся внутри материала в «защемлённом» состоянии. На поверхности $x = \xi$ температура сухого материала $U(\xi; t)$ равна температуре фазового перехода 100°C . Эта поверхность движется внутрь материала по мере поглощения им тепла (теплота парообразования). В начальный момент времени будем считать весь материал с неискривлённой поверхностью $x = 0$ нагретым до 100°C (то есть $\xi(0) = 0$).

За время Δt фазовая поверхность (плоскость $\xi(t)$) переместится на расстояние $\Delta \xi$. При этом в пар превратится масса $\alpha \rho_B \Delta \xi$, где ρ_B – плотность воды, $0 < \alpha < 1$ – влажность материала, и поглотится количество тепла $\alpha r \rho_B \Delta \xi$, где r – удельная теплота парообразования воды. Для выполнения теплового баланса при $x = \xi$ должно выполняться условие Стефана:

$$-K \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\xi} \cdot \Delta t = \alpha r \rho_B \Delta \xi,$$

где K – коэффициент теплопроводности сухого материала. На границе газ-материал ($x = 0$) выполняется условие теплообмена:

$$-K \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = h(U_1 - U|_{x=0}),$$

где h – коэффициент теплообмена.

Математическая модель. Обозначив для краткости $\frac{h}{K} = \delta, \frac{K}{a\rho_M} = \gamma, \Delta U = U_1 - 100$, и записав условие Стефана в виде $\xi' = -\gamma \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\xi}$ [1], получим математическую модель высыхания материала с неискривлённой поверхностью:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq \xi, \quad t \geq 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \delta(U|_{x=0} - U_1), \quad t \geq 0; \quad (2)$$

$$\xi_1(t) = \gamma\delta\Delta ut - \left(\gamma^2\delta^3\Delta u^2 + \frac{1}{a^2}\gamma^3\delta^3\Delta u^3\right)\frac{t^2}{2!} + \left(3\gamma^3\delta^5\Delta u^3 + \frac{8}{a^2}\gamma^4\delta^5\Delta u^4 + \frac{5}{a^4}\gamma^5\delta^5\Delta u^5\right)\frac{t^3}{3!} - \dots \quad (6)$$

Отсюда можно получить представление о ходе процесса сушки, но только лишь в его начале. Для оценок $\xi(t)$ за длительные промежутки времени потребовалась бы трудоёмкая работа по вычислению других слагаемых в (6) при неизвестном интервале сходимости этого ряда.

Верхнюю границу для $\xi(t)$ при длительном процессе сушки можно получить, рассмотрев идеальный материал с нулевой удельной теплоёмкостью c , не поглощающий тепло. В этом случае $a^2 = \frac{K}{c\rho_M} \rightarrow \infty$, а (1) принимает вид: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. Отсюда $u(x, t) = x\varphi(t) + \psi(t)$. Согласно (2) и (3) определяем произвольные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, а затем решаем задачу Коши (4) и (5), получаем

$$\xi_2 = \sqrt{\frac{1}{\delta^2} + 2\gamma\Delta ut} - \frac{1}{\delta}$$

или, после умножения и деления на сопряжённое выражение

$$\xi_2 = \frac{2\gamma\delta\Delta ut}{\sqrt{1+2\gamma\delta^2\Delta ut}+1}. \quad (7)$$

Так как всё тепло в идеальном материале идёт только на испарение, то $\xi(t) < \xi_2(t), t > 0$. Из (7), в частности, следует, что даже для идеального материала при данных условиях скорость роста слоя высохшего материала $\xi_2'(t) = \frac{\gamma\Delta u}{\sqrt{\frac{1}{\delta^2}+2\gamma\Delta ut}}$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, а, следовательно, $\xi'(t)$ тоже.

Далее рассмотрим реальный материал. Продифференцируем (3) по t :

$$\frac{d}{dt}(u(\xi(t); t)) = \frac{\partial u(\xi; t)}{\partial \xi} \cdot \xi' + \frac{\partial u(\xi; t)}{\partial t} = 0. \quad (8)$$

Записав (4) в виде $\xi' = -\gamma \frac{\partial u(\xi; t)}{\partial \xi}$ и подставив в (8), получим

$$U|_{x=\xi} = 100, \quad t \geq 0; \quad (3)$$

$$\xi' = -\gamma \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\xi}, \quad t \geq 0; \quad (4)$$

$$\xi(0) = 0; \quad (5)$$

где $a^2 = \frac{K}{c\rho_M}$ – коэффициент температуропроводности сухого материала с удельной теплоёмкостью c и плотностью ρ_M .

Здесь искомой является зависимость размера слоя высохшего материала от времени $\xi(t)$. Эту зависимость можно получить в виде степенного ряда [2]:

$$\frac{\partial u(\xi; t)}{\partial t} = \gamma \left(\frac{\partial u(\xi; t)}{\partial \xi}\right)^2 \quad (9)$$

Так как при $x = \xi$ (1) имеет вид $\frac{\partial u(\xi; t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(\xi; t)}{\partial \xi^2}$, то учитывая (9), получим

$$a^2 \frac{\partial^2 u(\xi; t)}{\partial \xi^2} = \gamma \left(\frac{\partial u(\xi; t)}{\partial \xi}\right)^2.$$

Считая t параметром, отсюда получаем дифференциальное уравнение второго порядка:

$$a^2 \frac{d^2 u}{d\xi^2} = \gamma \left(\frac{du}{d\xi}\right)^2.$$

Из него находим $\frac{du}{d\xi} = -\frac{1}{\frac{\gamma}{a^2}\xi + C}$. Заменяя здесь произвольную постоянную C произвольной функцией времени $C = \frac{1}{\lambda(t)}$, получим

$$\frac{du}{d\xi} = -\frac{1}{\frac{\gamma}{a^2}\xi + \frac{1}{\lambda(t)}} = -\frac{\lambda(t)}{\frac{\gamma}{a^2}\lambda(t)\xi + 1}. \quad (10)$$

Следовательно, в соответствии с (4)

$$\xi' = \frac{\gamma\lambda(t)}{\frac{\gamma}{a^2}\lambda(t)\xi + 1}. \quad (11)$$

Умножив обе части (11) на 2ξ , получим

$$(\xi^2)' = 2a^2 - \frac{2a^2}{\frac{\gamma}{a^2}\lambda(t)\xi + 1}. \quad (12)$$

Интегрируя по ξ уравнение (10), получим:

$$u(\xi; t) = -\frac{a^2}{\gamma} \ln\left(\frac{\gamma}{a^2}\lambda(t)\xi + 1\right) + \psi(t), \quad (13)$$

где $\psi(t)$ – произвольная функция.

Эта функция зависит только от времени t и не зависит от ξ , а это возможно лишь при $x = 0$, то есть $\psi(t) = u(x, t)|_{x=0}$.

Из (13) в соответствии с (3) имеем:

$$-\frac{a^2}{\gamma} \ln\left(\frac{\gamma}{a^2}\lambda(t)\xi + 1\right) + \psi(t) = 100,$$

отсюда

$$\psi(t) = 100 + \frac{a^2}{\gamma} \ln \left(\frac{\gamma}{a^2} \lambda(t) \xi + 1 \right) = u(x, t)|_{x=0}.$$

Но при достаточно большой продолжительности сушки температура поверхности высушенного материала $u(x, t)|_{x=0}$ возрастает и выравнивается с температурой газа u_1 . Таким образом,

$$u(x, t) = 100 + \frac{a^2}{\gamma} \ln \left(\frac{\gamma}{a^2} \lambda(t) \xi + 1 \right) \rightarrow u_1,$$

а потому возрастает и величина $\frac{\gamma}{a^2} \lambda(t) \xi + 1$, следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a^2}{\gamma} \ln \left(\frac{\gamma}{a^2} \lambda(t) \xi + 1 \right) = u_1 - 100 = \Delta u.$$

Отсюда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\gamma}{a^2} \lambda(t) \xi + 1 \right) = e^{\frac{\gamma \Delta u}{a^2}}. \quad (14)$$

Интегрируя (12), получим

$$\xi^2 = 2a^2 t - 2a^2 \int_0^t \frac{dy}{\frac{\gamma}{a^2} \lambda(y) \xi + 1},$$

отсюда

$$\frac{\xi^2}{2a^2 t} = 1 - \frac{\int_0^t \frac{dy}{\frac{\gamma}{a^2} \lambda(y) \xi + 1}}{t}.$$

Переходя здесь к пределу при $t \rightarrow \infty$, учитывая, что в силу (14) интеграл расходится, по правилу Лопиталья имеем:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\xi^2}{2a^2 t} = 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\gamma}{a^2} \lambda(t) \xi + 1} = 1 - e^{-\frac{\gamma \Delta u}{a^2}}.$$

Это значит, что при больших значениях t величина $\xi(t)$ асимптотически стремится к значениям

$$\xi_3(t) = \sqrt{2a^2 \left(1 - e^{-\frac{\gamma \Delta u}{a^2}} \right) t}, \quad (15)$$

оставаясь меньше их.

Для обеспечения большей точности расчётов дополним (15) ещё одной возможностью оценки $\xi(t)$. Для этого заметим, что из (12) с учётом (14) следует, что величина $1 - \frac{(\xi^2)'}{2a^2}$ монотонно убывает и ограничена. Тогда, выразив

из (11) $\frac{1}{\lambda(t)} = \frac{\gamma \left(1 - \frac{(\xi^2)'}{2a^2} \right)'}{\xi'}$ и учитывая, что $\xi'(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, получаем, что $\lambda(t)$, монотонно убывая, стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Из (11), учитывая (5) и то, что из (6) следует $\xi'(0) = \gamma \delta \Delta u$, найдём $\lambda(0) = \delta \Delta u$ – максимальное значение $\lambda(t)$. Заменяя в (11) $\lambda(t)$ максимальным значением, получим

$$\xi_4' = \frac{\gamma \delta \Delta u}{\frac{\gamma}{a^2} \delta \Delta u \xi_4 + 1}.$$

Интегрируя это уравнение с начальным условием $\xi_4'(0) = 0$, получим

$$\xi_4(t) = \frac{2\gamma \delta \Delta u t}{\sqrt{1 + 2\gamma \delta^2 \Delta u t \frac{\gamma \Delta u}{a^2} + 1}}. \quad (16)$$

Очевидно, что истинное значение $\xi(t) < \xi_4(t)$. Сравнивая (7) и (16), заметим, что при $\frac{\gamma \Delta u}{a^2} = 1$ величины $\xi_2(t)$ и $\xi_4(t)$ совпадают, при $\frac{\gamma \Delta u}{a^2} > 1$ имеем $\xi_2(t) > \xi_4(t)$, а при $\frac{\gamma \Delta u}{a^2} < 1$ $\xi_2(t) < \xi_4(t)$. Представим графически полученные зависимости (для случая $\frac{\gamma \Delta u}{a^2} > 1$).

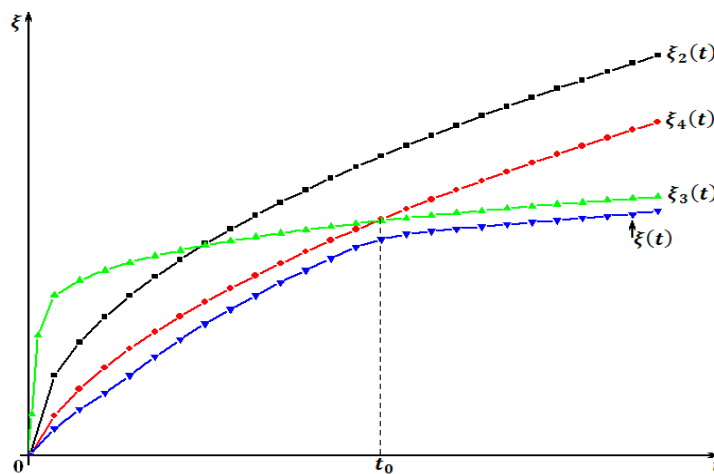


Рис. 2. К оценке $\xi(t)$

Выводы. Обозначим $\frac{\gamma \Delta u}{a^2} = \mu$, тогда при $\mu > 1$ имеем $\xi_4(t) < \xi_2(t)$, следовательно, истинное

значение $\xi(t)$ надо оценивать как $\xi(t) < \xi_4(t)$ при $t < t_0$ и как $\xi(t) < \xi_3(t)$ при $t > t_0$,

где $t_0 = \frac{2}{\gamma \Delta t \mu a^2} (e^{2\mu} - e^\mu)$ – корень уравнения $\xi_3(t) = \xi_4(t)$ (см. рис. 2).

При $\mu < 1$ имеем $\xi_2(t) < \xi_4(t)$, поэтому истинное значение $\xi(t)$ надо оценивать как $\xi(t) < \xi_2(t)$ при $t < t_1$ и как $\xi(t) < \xi_3(t)$ при $t > t_1$ где $t_1 = \frac{2(1-e^{-\mu})}{\delta^2 a^2 (\mu - 1 + e^{-\mu})^2}$ – корень уравнения $\xi_3(t) = \xi_2(t)$.

Полученные формулы для $\xi_2(t)$, $\xi_3(t)$, $\xi_4(t)$ удобны для практического применения при организации и расчёте технологических процессов сушки материалов в различных отраслях промышленности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М: Изд-во МГУ, 2004. 798 с.
2. Петрашев В.И. Об оценке толщины высохшего слоя шлама в цементной печи // Известия вузов, «Строительство». 2000. № 10(502). С. 124–129.
3. Федоренко Б.З. Оценки теплотехнологических процессов в цепных завесах цементных печей / Математическое моделирование техно-

логических процессов в производстве строительных материалов и конструкций // Сб. научн. Трудов, Белгород: БелГТАСМ, 1998. С. 10–16.

4. Муштаев В.И., Ульянов В.М. Сушка дисперсных материалов. М.: Химия, 1988. 352 с.
5. Рубинштейн Л.И. Проблема Стефана. Рига: Звайзгне, 1967. 458 с.
6. Мейрманов А.М. Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986. 239 с.
7. Лыков М.В. Сушка в химической промышленности. М.: Химия, 1988. 352 с.
8. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твёрдых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
9. Данилюк И.И. О задаче Стефана // Успехи математических наук. 1985. 40:5(245). С. 135–185.
10. Олейник О.А. Об одном методе решения общей задачи Стефана // Доклады АН СССР. 1960. № 5. С. 135.
11. Меламед В.Г. Сведения задачи Стефана к системе обыкновенных дифференциальных уравнений // Известия АН СССР, Серия: Геофизика. 1958. № 7.

Gorlov A.S., Petrashev V.I.

ASYMPTOTIC SOLUTION OF SINGLE-PHASE PROBLEM ABOUT DRYING OF MATERIALS AT HIGH VALUES OF TIME

In article mathematical drying model of materials with not curved surface is offered on the basis of the classical Stefan problem. Asymptotic solution of single-phase problem is obtained at high values of drying time.

Key words: *temperature, Stefan problem, heat of vaporization, specific heat, layer of dried material.*

Горлов Александр Семенович, кандидат технических наук, доцент.
Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова.
Адрес: Россия, 308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46.
E-mail: belgoras@mail.ru

Петрашев Владимир Иванович, старший преподаватель.
Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова.
Адрес: Россия, 308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46.
E-mail: petrashev_v@mail.ru