

Бойко А.Ф., д-р техн. наук, проф.,

Кудеников Е.Ю., аспирант

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова

## ТОЧНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА НЕОБХОДИМОГО КОЛИЧЕСТВА ПОВТОРНЫХ ОПЫТОВ

kudеников@bk.ru

В статье анализируется новый, более точный метод расчёта необходимого количества повторных опытов при проведении экспериментальных исследований в области машиностроения. Предложен, обоснован и табулирован новый  $t_n$ -критерий минимально необходимого числа повторных опытов. Установлено, что новый метод даёт стабильные и более точные результаты, не требует большого количества пробных опытов, универсален, может применяться для любых выборок, при любых требованиях к точности измерений и любых принимаемых доверительных вероятностей расчётов.

**Ключевые слова:** точность измерений, серия дублирующих опытов, эксперимент, количество повторных опытов,  $t$  – критерий Стьюдента.

Известно, что для обеспечения заданной точности и надёжности измерений при проведении совокупности повторных (параллельных) опытов необходимо знать минимальное их количество. При этом во многих работах [1–5] описывается методика, согласно которой для определения количества опытов проводят пробную серию дублирующих опытов, производят статистическую обработку результатов эксперимента и по формуле (1) определяют минимально необходимое количество опытов:

$$n_{min} \geq \left( \frac{\sigma t}{\bar{a} k_T} \right)^2, \quad (1)$$

где  $\bar{a}$  – среднее значение, а  $\sigma$  – среднеквадратичное отклонение измерений;  $k_T$  – требуемая точность измерений в относительных единицах (задаётся в % или десятичной дробью условием задачи);  $t$  – критерий Стьюдента, выбираемый по таблице [3] в зависимости от числа проведенных опытов  $n$  или числа степеней свободы  $f=n-1$  и заданной доверительной вероятности  $P_d$ .

Если требуемая точность измерений задана в абсолютных единицах  $\Delta$  (мм, с., Н, МПа и др.), то формула (1) принимает вид:

$$n_{min} \geq \left( \frac{\sigma t}{\Delta} \right)^2, \quad (2)$$

Анализируя формулы (1) и (2) несложно заметить их противоречивость. По логике, искомому числу  $n_{min}$  в левой части формул должны строго соответствовать значения  $t$  и  $\sigma$  в правой части. Так как  $n_{min}$  нам неизвестно, то, очевидно, принятие  $t$  и  $\sigma$  по результатам пробного эксперимента с числом опытов  $n_{пр}$  является логически неверным, так как в общем случае  $n_{пр} \neq n_{min}$ , что и подтверждается многочисленными экспериментами. Была предложена новая методика расчёта минимально необходимого числа повторных опытов. Сущность её заключается в следующем.

Формулы (1) и (2) преобразуем таким образом, чтобы в одной части формул находились только расчётные параметры, в другой – только табличные. Так как табличное значение  $t$  – критерия Стьюдента определяется по заданной доверительной вероятности и числу степеней свободы [6–10]  $f = n - 1$ , то  $n_{min}$  можно выразить как  $n_{min} = f + 1$ . Тогда формулы (1) и (2) можно привести к виду:

$$\frac{k_T \bar{a}}{\sigma} \geq \frac{t}{\sqrt{f+1}} \quad (3)$$

$$\frac{\Delta}{\sigma} \geq \frac{t}{\sqrt{f+1}} \quad (4)$$

Выражение в правой части формул состоит только из табличных взаимосвязанных параметров  $t$  и  $f$ , взятых из таблицы коэффициента Стьюдента, и является табличным критерием минимального числа повторных опытов. Обозначим его как  $t_{пт} = \frac{t}{\sqrt{f+1}}$ . Расчётное значение критерия представляет собой левые части формул (3) и (4), то есть:

$$t_{пр} = \frac{k_T \bar{a}}{\sigma} \quad (5)$$

$$t_{пр} = \frac{\Delta}{\sigma} \quad (6)$$

Таким образом, для обеспечения заданной точности и надёжности измерений должно быть выполнено условие:

$$t_{пр} = \frac{k_T \bar{a}}{\sigma} \geq t_{пт} = \frac{t}{\sqrt{f+1}} \quad (7)$$

$$t_{пр} = \frac{\Delta}{\sigma} \geq t_{пт} = \frac{t}{\sqrt{f+1}} \quad (8)$$

Тогда минимальное количество повторных опытов выборки по новой методике определяется в следующей последовательности.

1. Проводят предварительный эксперимент с  $n$  количеством повторных опытов (достаточно 3-4 опыта).

2. Вычисляют среднеарифметическое  $\bar{a}$  и среднеквадратичное отклонение  $\sigma$  измерений.

3. Известными методами [1–5] из статистического ряда измерений исключают грубые

ошибки (резко отличающиеся измерения) и для оставшегося ряда пересчитывают  $\bar{a}$  и  $\sigma$ .

4. Определяют расчётное значение  $t_{np}$  – критерия минимального количества повторных опытов по формулам (5) или (6).

5. Для выполнения требований (7) и (8) выбирают ближайшее меньшее или равное относительно расчётного табличное значение  $t_n$  – критерия по следующей расширенной таблице  $t$  – критерия Стьюдента, которая для доверительных вероятностей  $P_\delta=0,90; 0,95; 0,99$  имеет вид:

Таблица 1

Таблица  $t_n$ - критерия минимального количества повторных опытов

$f$	$P_\delta=0,90$		$P_\delta=0,95$		$P_\delta=0,99$	
	$t$	$t_n$	$t$	$t_n$	$t$	$t_n$
1	6,3130	4,4640	12,7060	8,9845	63,6560	45,0116
2	2,9200	1,6859	4,3020	2,4838	9,9240	5,7296
3	2,3534	1,1767	3,1820	1,5910	5,8400	2,9200
4	2,1318	0,9534	2,7760	1,2415	4,6040	2,0590
5	2,0150	0,8226	2,5700	1,0492	4,0321	1,6461
6	1,9430	0,7344	2,4460	0,9245	3,7070	1,4011
7	1,8946	0,6698	2,3646	0,8360	3,4995	1,2373
8	1,8596	0,6199	2,3060	0,7687	3,3554	1,1185
9	1,8331	0,5797	2,2622	0,7154	3,24498	1,0277
10	1,8125	0,5465	2,2281	0,6718	3,1693	0,9556
11	1,7950	0,5182	2,2010	0,6354	3,1050	0,8963
12	1,7823	0,4943	2,1788	0,6043	3,0845	0,8555
13	1,7709	0,4733	2,1604	0,5774	3,0123	0,8051
14	1,7613	0,4548	2,1448	0,5538	2,9760	0,7684
15	1,7530	0,4383	2,1314	0,5329	2,9467	0,7367
16	1,7450	0,4232	2,1190	0,5139	2,9200	0,7082
17	1,7396	0,4100	2,1098	0,4973	2,8982	0,6831
18	1,7341	0,3978	2,1009	0,4820	2,8784	0,6604
19	1,7291	0,3866	2,0930	0,4680	2,8609	0,6397
20	1,7247	0,3764	2,0860	0,4552	2,8453	0,6209
21	1,7200	0,3667	2,0790	0,4432	2,8310	0,6036
22	1,7167	0,3580	2,0739	0,4324	2,8188	0,5878
23	1,7139	0,3498	2,0687	0,4223	2,8073	0,5730
24	1,7109	0,3422	2,0639	0,4128	2,7969	0,5594
25	1,7081	0,3350	2,0595	0,4039	2,7874	0,5467
26	1,7050	0,3281	2,0560	0,3957	2,7780	0,5346
27	1,7033	0,3219	2,0518	0,3878	2,7707	0,5236
28	1,7011	0,3159	2,0484	0,3804	2,7633	0,5131
29	1,6991	0,3102	2,0452	0,3734	2,7564	0,5032
30	1,6973	0,3048	2,0423	0,3668	2,7500	0,4939
32	1,6930	0,2947	2,0360	0,3544	2,7380	0,4766
34	1,6909	0,2858	2,0322	0,3435	2,7284	0,4612
36	1,6883	0,2776	2,0281	0,3334	2,7195	0,4471
38	1,6860	0,2700	2,0244	0,3242	2,7116	0,4342
40	1,6839	0,2630	2,0211	0,3156	2,7045	0,4224
42	1,6820	0,2565	2,0180	0,3077	2,6980	0,4114
44	1,6802	0,2505	2,0154	0,3004	2,6923	0,4013
46	1,6787	0,2449	2,0129	0,2936	2,6870	0,3919
48	1,6772	0,2396	2,0106	0,2872	2,6822	0,3832
50	1,6759	0,2347	2,0086	0,2813	2,6778	0,3750
60	1,6706	0,2139	2,0003	0,2561	2,6603	0,3406
70	1,6689	0,1981	1,9944	0,2367	2,6479	0,3142
80	1,6640	0,1849	1,9900	0,2211	2,6380	0,2931
90	1,6620	0,1742	1,9867	0,2083	2,6316	0,2759
100	1,6602	0,1652	1,9840	0,1974	2,6259	0,2613

По изложенной методике таблица может быть расширена.

6. По выбранному табличному  $t_n$  - критерию по этой же таблице определяют соответствующее выбранному критерию число степеней свободы  $f$  и рассчитывают минимально необходимое количество повторных опытов:  $n_{min} = f + 1$ .

7. Если окажется число предварительных опытов  $n < n_{min}$ , то эксперимент продолжают до общего числа опытов  $n = n_{min}$ . После чего делают перерасчёт  $\bar{a}$  и  $\sigma$ . Если окажется  $n \geq n_{min}$  то считают предварительный эксперимент достаточным, а все предварительные расчёты достоверными.

**Пример.** В результате экспериментальных исследований стойкости резцов и после исключения грубых ошибок был получен следующий статистический ряд стойкости в мин: 71.00; 66.00; 69.00; 72.00; 68.00; 67.00. При этом среднее значение стойкости составило  $\bar{T}=68,83$  мин. Определим расчётное значение  $t_n$  - критерия минимального количества повторных опытов:

$$t_{np} = \frac{K_T \bar{T}}{\sigma} = \frac{0,15 \cdot 68,83}{2,32} = 4,45,$$

где  $K_T=0,15(15\%)$  – заданная допустимая погрешность измерений.

Выбираем по табл.1 ближайшее меньшее значение  $t_n$  – критерия относительно расчётного 4,45. При заданной доверительной вероятности  $P_d=0,95$  это значение равно 2,4838, что соответствует числу степеней свободы  $f=2$  (см. отмеченное в табл.1). Тогда минимально необходимое количество повторных опытов  $n_{min}=f+1=2+1=3$ . Так как в данном примере  $n=6 > n_{min}=3$ , то количество опытов следует считать достаточным, а все результаты статистической обработки измерений – достоверными.

Для сравнения точности двух методик: традиционной методики, базирующейся на неравенствах (1) и (2) и методики, базирующейся на новом  $t_n$  - критерии (см. неравенства (3) и (4)), было проведено соответственно два комплекса расчётов минимально необходимого количества повторных опытов. В каждом комплексе, используя исходный статистический ряд измерений вышеизложенного примера, было обработано пять вариантов измерений с числом повторных опытов  $n=6,5,4,3$  и 2. При этом, начиная с  $n=6$ , каждый последующий вариант статистического ряда получался путём отбрасывания крайнего правого опыта предшествующего варианта. Исходные данные и результаты расчётов приведены в табл.2.

Таблица 2

**Результаты расчётов минимального количества повторных опытов по двум методикам для пяти вариантов экспериментов**

	Значения параметров статистических рядов измерений для пяти вариантов экспериментов с числом $n$ повторных опытов				
	6	5	4	3	2
1	2	3	4	5	6
Стойкость инструментов в эксперименте, мин	71;66;69; 72;68;67	71;66;69; 72;68	71;66;69; 72	71;66;69	71;66
Среднее значение стойкости в эксперименте, мин	68,8	69,2	69,5	68,7	68,5
Среднеквадратичное отклонение измерений, мин	2,32	2,39	2,65	2,52	3,53
Расчётное значение $t_n$ -критерия ( $t_{np}$ )	4,45	4,34	3,93	4,09	2,91
Ближайшее меньшее табличное ( $t_{np}$ ) значение $t_n$ -критерия при $P_d=0,95$	2,48	2,48	2,48	2,48	2,48
Минимально необходимое количество повторных опытов в эксперименте, полученное: -традиционным методом по формулам (1),(2) -по $t_n$ -критерию	1 3	1 3	1 3	2 3	20 3

Для наглядности различий двух методов определения минимального количества  $n_{min}$  повторных опытов построим график изменения  $n_{min}$  при изменении числа  $n$  пробных опытов:  $n_{min}=f(n)$ , используя для этого результаты расчётов табл.2.

Многочисленными экспериментами, выполненными в БГТУ им. В.Г. Шухова, установ-

лено многообразие возможных зависимостей  $n_{min}$  от числа повторных опытов, средних значений и дисперсий измерений, от требований к их точности и доверительной вероятности вычислений. На рис.2 показаны некоторые возможные варианты графиков, полученных в экспериментах при варьировании количеством пробных опытов одной выборки.

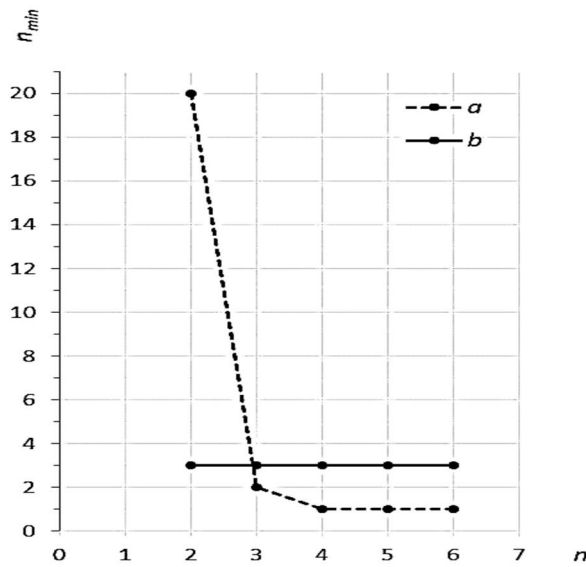


Рис. 1. График изменения минимально необходимого количества повторных опытов  $n_{min}$  при варьировании количеством  $n$  пробных опытов вышеописанного эксперимента: а – традиционный метод определения  $n_{min}$ ; в – метод  $t_n$ -критерия

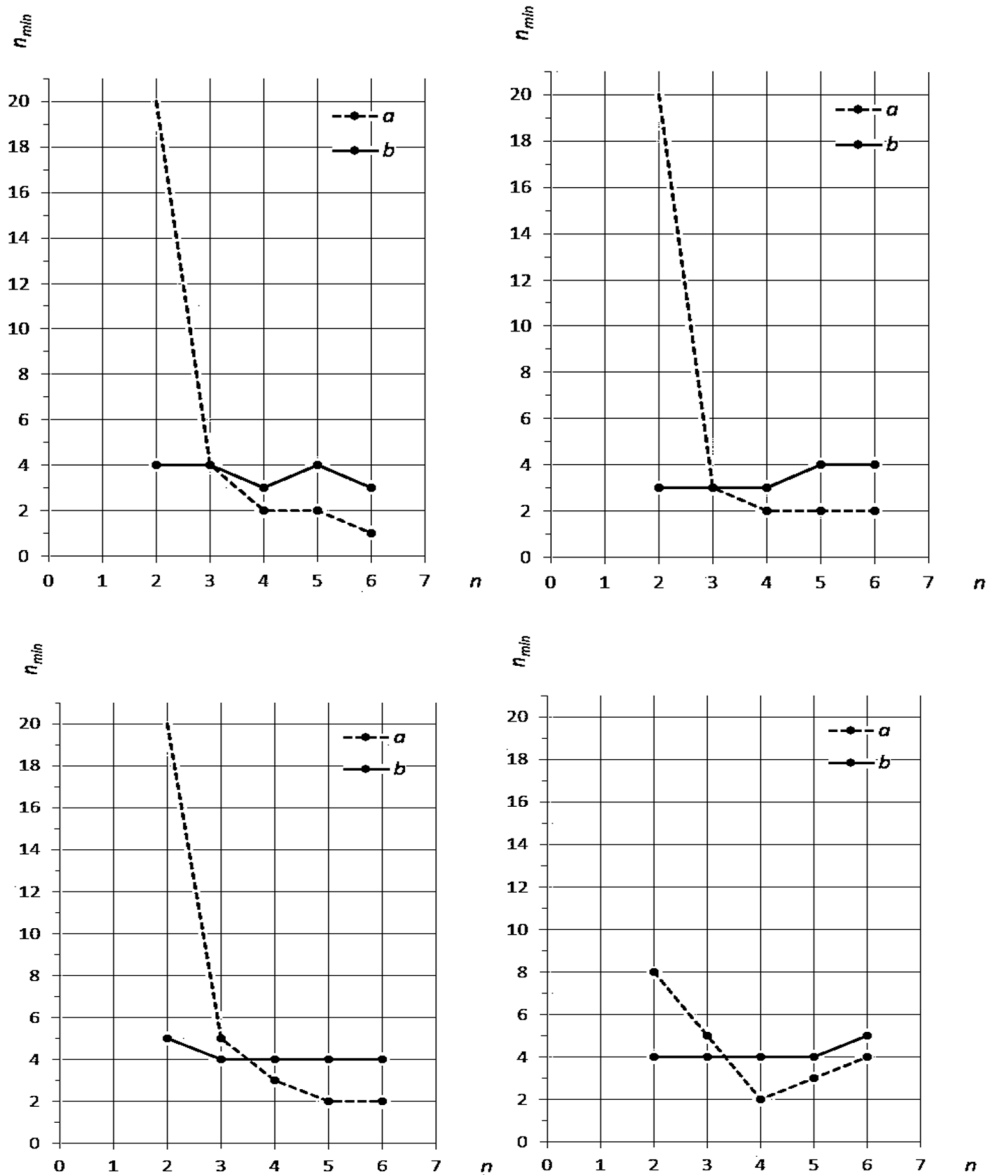


Рис. 2. Некоторые варианты графиков  $n_{min}=f(n)$ , полученные в реальных экспериментах

Несмотря на многообразие графиков  $n_{min}=f(n)$  можно сделать следующие обобщающие выводы.

1. Новый метод определения минимально необходимого количества повторных опытов по  $t_n$ -критерию в отличие от традиционного метода даёт стабильные результаты, не требует большого количества пробных опытов (достаточно 3-4) и дополнительной проверки.

2. Традиционный метод определения  $n_{min}$  при числе пробных опытов  $n > 3$  занижает минимально необходимое количество повторных опытов и практически всегда завышает при  $n=2$  (иногда и при  $n=3$ ).

3. Новый метод, базирующийся на  $t_n$ -критерий уникален, может применяться для любых выборок при любых требованиях к точности измерений и любых принимаемых доверительных вероятностей расчётов.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Афанасьев А.А., Погонин А.А. Физические основы измерений. Белгород: Изд-во БГТУ им. В.Г. Шухова, 2008. 275 с.
2. Бойко А.Ф., Воронкова М.Н. Теория планирования многофакторного эксперимента. Белгород: Изд-во БГТУ, 2013. 72 с.
3. Юрьев А.Г., Серых И.Р. Основы научных исследований. Белгород: Изд-во БГТУ, 2005. 86 с.
4. Лесовик В.С., Чернышева Н.В. Основы научных исследований. Белгород: Изд-во БГТУ, 2010. 89 с.
5. Щетинина И.А., Тихомирова Т.И. Основы научных исследований. Белгород: Изд-во БГТУ, 2010. 93 с.
6. Новик Ф.С., Арсов Я.Б. Оптимизация процессов технологии металлов методами планирования экспериментов. М.: Машиностроение, 1980. 304 с.
7. Розанов Ю.Н. Методы математической статистики в материаловедении. Л.: Машиностроение, 1990. 232 с.
8. Барабашук В.И. Планирование эксперимента в технике. К.: Техніка, 1984. 200 с.
9. Грешников В.А., Волков Б.Н., Кубарев А.И. Статистические методы обработки эмпирических данных. М.: Изд-во стандартов, 1978. 232 с.
10. Адлер Ю.П. Введение в планирование эксперимента. М.: Металлургия, 1968. 155 с.

**Boyko A.F., Kudenikov E.U.**

### EXACT METHODS CALCULATE THE NECESSARY AMOUNT OF REPEAT EXPERIENCE

*The article examines the new, more accurate method for calculating the required number of repeated experiments during the experimental research in the field of mechanical engineering. It proposed, justified and tabulated new  $t_n$ -criterion the minimum necessary number of repeated experiments. It was found that the new method provides stable and more accurate results, do not require a large number of trial runs, versatile, can be applied to all samples at all the requirements for measurement accuracy and confidence received any probability calculations.*

**Key words:** accuracy, a series of duplicate experiments, the experiment, the number of repeat tests, Student's  $t$ -test.

**Бойко Анатолий Федорович**, доктор техн. наук, профессор кафедры технологии машиностроения.

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова.

Адрес: Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, д. 46.

**Кудеников Евгений Юрьевич**, аспирант кафедры технологии машиностроения.

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова.

Адрес: Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, д. 46.

E-mail: kudenikov@bk.ru