

Редькин Г.М., д-р техн. наук, проф.,  
Коновалов А.В., аспирант

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗОНЫ ВЛИЯНИЯ ПРОБЫ

alexander.v.konovalev@yandex.ru

На основе математического моделирования анизотропии изменчивости геологического показателя предложен новый метод определения зоны влияния пробы. Данная зона ограничена зависящим от направления радиусом корреляции и представляет собой область, ограниченную подерой.

**Ключевые слова:** неоднородность оруденения, геологический показатель, проба, изменчивость, анизотропия, корреляция, вектор, матрица, тензор, подера.

Оценки геологических показателей и их погрешностей зависят от геологических и технологических факторов, а достоверность оценок от адекватного отражения используемым математическим аппаратом геолого-технологических факторов.

Геологические факторы представляют собой особенности внутреннего строения месторождений полезных ископаемых, связанные с периодами формирования залежей и воздействием диагенеза, эпигенеза, метаморфизма, тектонических деформаций, процессов трещинообразования. Внутреннее строение залежей характеризуется варьированием от непрерывного оруденения до крайне неравномерной дискретной минерализации.

Непрерывность оруденения участков недр может быть изотропно-однородной. В этом случае зона влияния пробы простирается на некоторое одинаковое расстояние во всех направлениях (окружность, сфера – частный случай подеры, подероида). Но чаще всего оруденение анизотропно-неоднородное и зона влияния пробы зависит от направления в пространстве. При крайне неравномерном оруденении зона влияния пробы практически ограничивается её объёмом.

Технологические факторы представляются формой, размерами проб и расстояниями между пробами. Большим размерам проб отвечают большие зоны их влияния.

Количественное описание свойств оруденения недр выражается понятием изменчивости геологических показателей. Под изменчивостью понимают принятие геологическим показателем в разных точках пространства различных значений. В зависимости от характеристик оруденения изменчивость проявляется как случайная, либо коррелированная, либо координированная (функциональная). Причём коррелированная изменчивость представляется коррелированной изотропной и коррелированной анизотропной изменчивостями.

Крайне неравномерному оруденению, либо большим расстояниям между пробами отвечает

случайная изменчивость геологических показателей. Для описания случайной изменчивости применяют аппарат математической статистики следующим образом. Данные опробования отождествляют со взаимно-независимыми значениями случайной величины, которая полностью определяется законом распределения вероятности и основными характеристиками – математическим ожиданием и дисперсией.

Непрерывному оруденению в пределах зон влияния проб соответствуют коррелированная, либо координированная изменчивости геологических показателей. Математическое моделирование коррелированной изотропной изменчивости осуществляется на основе стационарных эргодических случайных функций, основной характеристикой которых является корреляционная функция. Корреляционная функция отражает связи между значениями переменной, устанавливает предельные расстояния распространения этих связей и на её основе определяют оценки и погрешности оценок геологических показателей.

Коррелированную анизотропную изменчивость описывают математическими нестационарными анизотропными моделями путём отождествления значений геологического показателя с реализацией нестационарной случайной функцией, которая в каждом фиксированном направлении представляет собой стационарную эргодическую функцию [1]. При этом корреляционная функция выражается тензором второго ранга, который описывает анизотропную структуру связей поля значений геологического показателя.

В случае координированной изменчивости значения геологического показателя интерполируют полиномами различных степеней. Погрешности интерполирования называют ошибками аналогий и выражают их разностями на порядок выше степени интерполяционного многочлена [1].

Исходя из изложенного, актуальна проблема определения зон влияния проб. Ввиду того, что изотропная изменчивость является частным

случаем анизотропной изменчивости показателей, будем решать эту проблему для коррелированной анизотропной изменчивости.

Не ограничивая общности, рассмотрим решение данной проблемы в плоскости, что отве-

$$K(h; \alpha) = \bar{n} \cdot K(h) \cdot \bar{n}^T = (\cos\alpha; \sin\alpha) \begin{pmatrix} K_{xx}(h) & K_{xy}(h) \\ K_{yx}(h) & K_{yy}(h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $K(h; \alpha)$  – корреляционная функция, описывающая силу связей между значениями геологического показателя в зависимости от шага  $h$  и направления в плоскости  $\alpha$ ;  $K(h)$  – тензор второго ранга, выраженный в выбранной на месторождении системе координат квадратной неособенной симметричной матрицей;  $\bar{n}, \bar{n}^T$  – соответственно единичный и транспонированный единичный векторы направляющих косинусов;  $K_{xx}(h), K_{yy}(h)$  – корреляционные функции, отражающие связи между значениями геологического показателя в зависимости от шага  $h$  соответственно по направлениям осей  $Ox$  и  $Oy$ ;  $K_{xy}(h) = K_{yx}(h)$  – зависящие от шага  $h$  ковари-

рует погоризонтному изучению геологических показателей и обработке полезных ископаемых. Согласно [1] анизотропная изменчивость геологического показателя выражается в векторно-тензорной форме

ационные функции, отражающие связь значений геологического показателя между направлениями в плоскости.

Главные (собственные) оси тензора  $K(h)$  являются главными осями анизотропии коррелированной изменчивости. Приведём тензор  $K(h)$  к главным осям и получим [1] направления наибольших и наименьших связей

$$tg\varphi_{1,2}(h) = \frac{\lambda_{1,2}(h) - K_{xx}(h)}{K_{xy}(h)} = \frac{K_{xy}(h)}{\lambda_{1,2}(h) - K_{yy}(h)}, \quad (2)$$

и корреляционные функции, отражающие экстремальные значения связей по этим направлениям

$$\lambda_{1,2}(h) = \frac{K_{xx}(h) + K_{yy}(h)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{K_{xx}(h) - K_{yy}(h)}{2}\right)^2 + K_{xy}^2(h)}. \quad (3)$$

Тогда корреляционная функция (1) в системе главных осей  $Ox'y'$  примет наиболее простую каноническую форму

$$K(h; \alpha') = \bar{n}(\alpha') \cdot K'(h) \cdot \bar{n}^T(\alpha') = (\cos\alpha'; \sin\alpha') \begin{pmatrix} \lambda_1(h) & 0 \\ 0 & \lambda_2(h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha' \\ \sin\alpha' \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где  $\alpha'$  – определяющий направление угол в системе координат главных осей;  $\lambda_1(h), \lambda_2(h)$  – корреляционные функции в направлениях главных осей, отражающие наибольшие и наименьшие связи по этим направлениям.

Обозначим через  $r(\alpha')$  значение радиуса корреляции в направлении  $\alpha'$ . Радиус корреляции должен удовлетворять двум условиям:

1. Корреляционные функции  $\lambda_1(h)$  и  $\lambda_2(h)$  соответственно определяют радиусы корреляций  $r_1$  и  $r_2$ , которые принимают наибольшее и наименьшее значения и устанавливают предельные расстояния распространения связей между значениями геологического показателя по направлениям осей (2). Поэтому

$$\min\{r_1; r_2\} \leq r(\alpha') \leq \max\{r_1; r_2\}. \quad (5)$$

2. Из симметричности связей (4) относительно главных осей следует симметрия значений радиусов корреляции, т.е.

$$K(h; \alpha') = K(h; -\alpha') \Rightarrow r(\alpha') = r(-\alpha'). \quad (6)$$

Получим выражение для радиуса корреляции  $r(\alpha')$ . Поставим в соответствие экстремальным значениям  $r_1$  и  $r_2$  вектор

$$\bar{r} = (r_1; r_2). \quad (7)$$

Найдём проекцию вектора (7) на направление  $\alpha'$ , которая выражает значение радиуса корреляции в направлении  $\alpha'$  и равна скалярному произведению векторов  $\bar{r}$  и  $\bar{n}(\alpha') = (\cos\alpha'; \sin\alpha')$

$$r(\alpha') = n_{\alpha'} \bar{r} = \bar{r} \cdot \bar{n}(\alpha') = r_1 \cos\alpha' + r_2 \sin\alpha'. \quad (8)$$

Проекция (8) точно отражает значения радиусов корреляции в направлениях главных осей изменчивости  $r(0) = r_1$  и  $r\left(\frac{\pi}{2}\right) = r_2$ . Однако по другим направлениям  $0 < \alpha' < \frac{\pi}{2}$  приближённо и не удовлетворяет условию (5). Действительно, при  $\alpha' = \arctg\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$  получим

$$r(\alpha') = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}, \text{ что превышает и } r_1 < \sqrt{r_1^2 + r_2^2}, \text{ и } r_2 < \sqrt{r_1^2 + r_2^2}.$$

Тем не менее, на базе векторного представления радиуса корреляции (7), (8) перейдём к более сложному выражению радиуса корреляции, основанному на тензоре второго ранга, который может, удовлетворяя свойствам (5), (6), адекватно выразить радиус корреляции в зави-

симости от направления  $\alpha'$ . Возведём в квадрат проекцию (8)

$$r^2(\alpha') = r_1^2 \cos^2 \alpha' + r_1 \cdot r_2 \sin 2\alpha' + r_2^2 \sin^2 \alpha', \quad (9)$$

который также содержит указанную в проекции (8) погрешность. Исключим её следующим образом. Потребуем, чтобы равенство (9) удовлетворяло свойству (6). Для этого вычислим его в симметричном относительно главной оси  $Ox'$  направлении ( $-\alpha'$ )

$$r^2(-\alpha') = r_1^2 \cos^2 \alpha' - r_1 \cdot r_2 \sin 2\alpha' + r_2^2 \sin^2 \alpha', \quad (10)$$

вычтем его из равенства (9) и в силу требования свойства (6) получим

$$2 \cdot r_1 \cdot r_2 \sin 2\alpha' = r^2(\alpha') - r^2(-\alpha') \equiv 0. \quad (11)$$

Тогда из равенства (9) с учётом (11) определим выражение квадрата радиуса корреляции в зависимости от направления  $\alpha'$

$$r^2(\alpha') = r_1^2 \cos^2 \alpha' + r_2^2 \sin^2 \alpha'. \quad (12)$$

Выражение (12) целесообразно представить в тензорной (матричной) форме. Обозначим через  $R'$  тензор корреляции, представленный в главных осях  $Ox'y'$  тензора  $K(h)$  неособенной диагональной матрицей, и единичный вектор направляющих косинусов  $\bar{n}^T(\alpha')$ , полученный транспонированием орта  $\bar{n}(\alpha')$ :

$$R' = \begin{vmatrix} r_1^2 & 0 \\ 0 & r_2^2 \end{vmatrix} \text{ и } \bar{n}^T(\alpha') = \begin{pmatrix} \cos \alpha' \\ \sin \alpha' \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Тогда из равенства (12) выразим радиус корреляции в зависимости от направления  $\alpha'$  через скалярное произведение тензора корреляции  $R'$  и единичных векторов направляющих косинусов  $\bar{n}(\alpha')$ ,  $\bar{n}^T(\alpha')$ :

$$r(\alpha') = \left( (\cos \alpha'; \sin \alpha') \cdot \begin{vmatrix} r_1^2 & 0 \\ 0 & r_2^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha' \\ \sin \alpha' \end{pmatrix} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

Легко увидеть, что радиус корреляции (12), (14) удовлетворяет свойству (6)  $r(\alpha') = r(-\alpha')$ , а из теории матриц [2] следует, что стоящие на главной диагонали элементы  $r_1^2$  и  $r_2^2$  тензора корреляции  $R'$  (13), (14) являются экстремальными значениями выражений (12), (14), т.е. выполняется условие (5).

Формулы (12), (14) выражают зависимость радиуса корреляции  $r(\alpha')$  от направления  $\alpha'$  в системе главных осей  $Ox'y'$  тензора  $K(h)$  и, следовательно, тензора  $R'$ . При этом график радиуса корреляции образует замкнутую кривую, ограничивающую зону влияния пробы. Установим вид этой кривой и изобразим её форму.

Предварительно заметим, что система главных осей  $Ox'y'$  тензоров  $K(h)$  и  $R'$  является декартовой ортогональной системой координат и

образует угол  $\varphi$  с выбранной на месторождении системой координат  $Oxy$ .

Действительно, произведение левых и правых частей равенств (2) с учётом (3) даёт соотношение

$$\operatorname{tg} \varphi_1(h) \cdot \operatorname{tg} \varphi_2(h) = \frac{(\lambda_1(h) - K_{xx}(h)) \cdot (\lambda_2(h) - K_{xx}(h))}{K_{xy}^2} = -1, \quad (15)$$

свидетельствующее о взаимной ортогональности главных осей  $Ox'$  и  $Oy'$ . Тогда обозначим через  $\varphi_1(h) = \varphi$  – угол между осями  $Ox$  и  $Ox'$  и получим  $\varphi_2(h) = \varphi + \frac{\pi}{2}$  – угол между осями  $Ox$  и  $Oy'$ . Откуда следует, что  $\varphi$  – угол между принятой на месторождении системой координат  $Oxy$  и системой  $Ox'y'$  главных осей тензора  $R'$ .

Формулы радиуса корреляции (12), (14) являются в системе  $Ox'y'$  главных осей тензора  $R'$  уравнениями подеры (от греч. – нога) эллипса с полуосями  $r_1, r_2$  относительно его центра [1]. Кривая-подера представляет собой геометрическое место оснований перпендикуляра, опущенных из начала координат на касательные к эллипсу. На рис. 1 приведены подеры, ограничивающие зоны влияния проб, для коррелированной изотропной и коррелированной анизотропной изменчивостей геологических показателей, отвечающие разным значениям коэффициента анизотропии  $k = \frac{r_1}{r_2}$ .

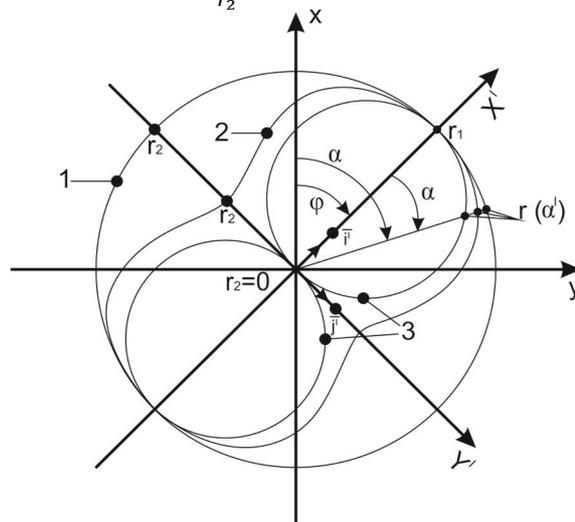


Рис. 1. Кривые подер, ограничивающие зоны влияния проб, отвечающие изменчивостям:

- 1 – коррелированной изотропной ( $r_1 = r_2, k = 1$ );
- 2 – коррелированной анизотропной ( $r_1 = 2r_2, k = 2$ );
- 3 – коррелированной анизотропной ( $r_2 = 0, k = \infty$ )

Для удобства практического применения радиуса корреляции (14), выраженного в системе  $Ox'y'$  главных осей тензора  $R'$ , целесообразно его представить в принятой на месторождении системе координат  $Oxy$ .

Переход от системы координат  $Ox'y'$  к принятой на месторождении системе  $Oxy$  осуществляется с помощью матрицы поворота [2]

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$Q \cdot Q^T = Q^T \cdot Q = E \Rightarrow Q^T = Q^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где  $E$  – единичная матрица, а  $Q^T, Q^{-1}$  – соответственно транспонированная и обратная матрицы.

Теперь тензор  $R'$  (13) и радиус корреляции  $r(\alpha')$  (14) в принятой на месторождении систе-

где что  $\varphi$  – угол между системами  $Ox'y'$  и  $Oxy$ . При этом матрица  $Q$  – ортогональная и удовлетворяет равенствам

ме координат  $Oxy$  с учётом (16), (17) примут соответственно вид

$$R = Q \cdot R' \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} r_1^2 + r_2^2 \operatorname{tg}^2 \varphi & (r_1^2 - r_2^2) \operatorname{tg} \varphi \\ (r_1^2 - r_2^2) \operatorname{tg} \varphi & r_1^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + r_2^2 \end{pmatrix} \cdot \cos^2 \varphi, \quad (18)$$

$$r(\alpha) = \left( (\cos\alpha; \sin\alpha) \cdot \begin{pmatrix} r_1^2 + r_2^2 \operatorname{tg}^2 \varphi & (r_1^2 - r_2^2) \operatorname{tg} \varphi \\ (r_1^2 - r_2^2) \operatorname{tg} \varphi & r_1^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + r_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \right)^{\frac{1}{2}} |\cos\varphi|, \quad (19)$$

где  $\alpha$  – определяющий направление угол в системе координат  $Oxy$ .

Полученные выражения радиусов корреляции (19), (14) в зависимости от направления в пространстве и их геометрическая интерпретация (см. рис.) является важным результатом, так как только в пределах зон корреляции проб правомерна интерполяция, аппроксимация и экстраполяция разведочных данных [3].

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Редькин Г.М. Нестационарное анизотропное математическое моделирование неоднородностей систем минерального сырья. М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2007. 500 с.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
3. Каждан А.Б. Методологические основы разведки полезных ископаемых. М.: Недра, 1974. 270 с.

---

**Redkin G.M., Kononov A.V.**

#### MATHEMATICAL MODELING OF SAMPLE'S INFLUENCE ZONE

*The article describes suggested new method for finding influence zone of sample, which is based on the mathematical modeling of geological parameter variability anisotropy. This influence zone is area bounded by pedal curve, and it is limited by correlation radius that depends on direction.*

**Keywords:** mineralization heterogeneity, geological parameter, sample, variability, anisotropy, correlation, vector, matrix, tensor, pedal curve.

---

**Редькин Геннадий Михайлович**, доктор технических наук, профессор.  
Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова.  
Адрес: Россия, 308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46.

**Коновалов Александр Владимирович**, младший научный сотрудник.  
ОАО «ВИОГЕМ», отдел геологии и геоинформатики.  
Адрес: Россия, 308007, Россия, г. Белгород, пр-т Богдана Хмельницкого, 86.  
E-mail: alexander.v.kononov@yandex.ru