DOI: 10.12737/article_590878fb95a2e0.77933177

Литвинов Д.А., аспирант
Воронежский государственный университет

О ПОСТРОЕНИИ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

d77013378@yandex.ru

Рассматривается задача построения линейной обратной связи по состоянию для линейной динамической системы методом разложения в ряд матрицы, заданной параметрически, и дальнейшего решения необходимых уравнений. Для решения уравнений используется метод минимизации специальной функции. Приводится практический пример использования данного метода для поиска матрицы обратной связи, позволяющей корректировать управление движением самолета в зависимости от его состояния в реальном времени.

***Ключевые слова**: линейная динамическая система, управление, обратная связь,матрица обратной связи, матричная экспонента,численное нахождение минимума функции, самолет с вертикальным взлетом и посадкой.*

1. Введение Один из подходов к проблеме построения управления связан с идеей обратной связи. Управление не выбирается заранее, а корректируется в каждый текущий момент на основании информации о состоянии системы. Обратная связь – это процесс передачи информации о состоянии объекта управления управляющему объекту. Одним из способов построения обратной связи для линейной динамической системы является построение с помощью матрицы обратной связи. Выбор управления в форме функции от состояния и момента времени называется синтезом управления $u = \varphi(x,t)$. Однако в общем случае после выбора управления в таком виде уравнение состояния становится нелинейным и нестационарным. Поэтому мы ограничимся линейной статической обратной связью по состоянию $u = Kx$, которая к тому же обеспечивает наилучшее значение критерия оптимальности в классе любых управлений [2, 3].

Данным вопросом занимались многие ученые. Например, в работах [1, 2, 3] строится матрица обратной связи путем решения линейных матричных неравенств для задачи стабилизации состояния системы. Стабилизация, а именно - придание функции состояния системы асимптотической устойчивости, также рассматривалась и в работах [4, 5, 6], в которых авторы помимо решения данной задачи ставят еще вопрос о разреженности матрицы обратной связи, т.е требования наличия у вектора управления $u(t)$ как можно большего количества нулевых компонент.

В данной работе решается вопрос перевода состояния системы из начальной точки в конечную с помощью обратной связи методом, отличным от описанного в [1, 2, 3], а именно с помощью матричных рядов. Более того здесь рассматривается технология проверки конечной точки $x(T)$ на возможность перехода в нее из начальной точки $x(0)$ с помощью управления, синтезированного методом обратной связи. Такой переход можно осуществить далеко не во всякую точку $x(T)$. Например в работах [2, 3] показано, что из любой точки $x(0)$ невозможно перейти в 0 за конечное время T. Также здесь решается задача проверки допустимого диапазона краевых значений на существование внутри него точки, в которую можно осуществить переход методом обратной связи.

2. Постановка задачи Для полностью управляемой динамической системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad (1)$$

где $x \in R^n, u \in R^n$, A и B - постоянные матрицы соответствующих размеров, $t \in [0,T]$, ставится задача построения такой постоянной матрицы K, что существует управляющая вектор-функция $u(t)$ и функция состояния (траектория) системы $x(t)$, удовлетворяющие уравнению (1) и следующим условиям:

$$x(0) = x_0, x(T) = x_T, \qquad (2)$$

и

$$u(t) = Kx(t), \forall t \in [0,T]. \qquad (3)$$

Такое управление $u(t)$ называют управлением с обратной связью, а матрица K называется матрицей обратной связи.

Более того, требуется найти ограничения на x_0 и x_T, достаточные для разрешимости поставленной выше задачи.

Подставив (3) в (1), сделаем замену

$$M = A + BK \ (M : n \times n). \qquad (4)$$

3. Предварительные сведения Исследование опирается на следующие свойства отображений (отображения и соответствующие им матрицы обозначаются одинаково).

Отображению B с прямоугольной матрицей $m \times n$ соответствуют следующие разложения пространств в прямые суммы:

$$R^m = KerB + CoimB,\ R^n = CokerB + ImB, \quad (5)$$

где

$KerB$ – ядро B, то есть множество решений уравнения $Bz = 0$;

$CoimB$ – прямое дополнение к $KerB$ в R^n;

ImB – образ B, то есть множество значений B;

$CokerB$ – прямое дополнение к ImB в R^m, то есть дефектное подпространство для B.

Сужение $\widetilde{B}$ отображения B на $CoimB$ обратимо.

Проекторы на $KerB$ и $CokerB$, отвечающие разложению (5), обозначаются через P и Q соответственно. Вводится называемое полуобратным отображение $B^- = \widetilde{B}^{-1}(I - Q)$, где I – единичное отображение в соответствующем пространстве.

Известен следующий результат[7].

Лемма.

Соотношение

$$Bz = w,\ w \in R^m,\ z \in R^n, \quad (6)$$

эквивалентно системе

$$Qw = 0, \quad (7)$$

$$z = B^- w + Pz, \quad (8)$$

где Pz - *произвольный элемент из пространства* $KerB$.

4.Решение поставленной задачи. Переформулируем задачу.Требуется найти такую связь между x_0 и x_T, что решение $x(t)$ задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = Mx(t), \quad (9)$$

с условием

$$x(0) = x_0, \quad (10)$$

удовлетворяет условию

$$x(T) = x_T. \quad (11)$$

Задача Коши (9), (10) имеет решение

$$x(t) = exp(tM) \cdot x_0, \quad (12)$$

где

$$exp(tM) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i M^i}{i!}. \quad (13)$$

Подставив $t = T$ в (12), получим условие для выполнения (11):

$$exp(TM) \cdot x_0 = x_T. \quad (14)$$

Рассмотрим уравнение для нахождения матрицы K:

$$BK = M - A, \quad (15)$$

следующее из (4).

*Вариант 1.*Матрица B - обратима.

Тогда

$$K = B^{-1}(M - A). \quad (16)$$

В качестве M возьмем матрицу

$$\frac{1}{T}\begin{pmatrix} ln(\frac{x_{T1}}{x_{01}}) & 0 & ... & 0 \\ 0 & ln(\frac{x_{T2}}{x_{02}}) & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & ln(\frac{x_{Tn}}{x_{0n}}) \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Единственным требованием на связь между компонентами краевых значений здесь будет требование $\frac{x_{Ti}}{x_{0i}} > 0,\ i : \overline{1..n}.$

Докажем, что матрица (17) удовлетворяет условию (14). Построив ряд (13) для показанной матрицы M, получим

$$e^{TM} = \begin{pmatrix} \frac{x_{T1}}{x_{01}} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \frac{x_{T2}}{x_{02}} & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & \frac{x_{Tn}}{x_{0n}} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

откуда очевидно следует выполнение условия (14). Используя найденную матрицу M, из (16) находим K.

*Вариант 2.*Матрица B не обратима.

Тогда необходимым и достаточным условием разрешимости (15) будет условие

$$Q(B)(M - A) = 0. \quad (19)$$

Для разрешимости уравнения (19) необходимо и достаточно, чтобы

$$M - A \in ImB \Leftrightarrow M - A = (I - Q(B))L$$

$$(\forall L : n \times n).$$

Это эквивалентно тому, что

$$M = A + (I - Q(B))L. \quad (20)$$

Тогда

$$K = B^-(M - A) + P_B L_1 \quad (21)$$

с произвольной матрицей $L_1 : n \times n.$

Для проверки соответствия M, определенного формулой (20), условию (14) следует подсчитать $e^{TM} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(TM)^i}{i!}$.

5. Видоизмененная задача В реальности вероятность того, что заранее заданная точка x_T способствует переходу в нее из произвольной точки x_0 с помощью матрицы обратной связи достаточно низка. Однако в большинстве реальных задач существует целый диапазон благоприятных точек, переход в которые из начальной точки x_0 способствует решению поставленной физической задачи. Вероятность разрешимости подобной задачи гораздо выше, чем рассмотренной ранее.

Теперь поставленная задача изменится следующим образом: требуется найти такую точку x_T, что выполнены неравенства $\alpha_i \le x_{Ti} \le \beta_i$ $i=\overline{1,n}$, где диапазоны $[\alpha_i,\beta_i]$, и для данной точки разрешима поставленная задача (2),(3). Диапазоны для компонент конечного краевого значения здесь зависят от рассматриваемого практического примера.

Запишем матрицу TM в виде:

$$TM=\begin{pmatrix} M_{11}(l_1,...,l_k) & M_{12}(l_1,...,l_k) & ... & M_{1n}(l_1,...,l_k) \\ M_{21}(l_1,...,l_k) & M_{22}(l_1,...,l_k) & ... & M_{2n}(l_1,...,l_k) \\ . & . & . & . \\ M_{n1}(l_1,...,l_k) & M_{n2}(l_1,...,l_k) & ... & M_{nn}(l_1,...,l_k) \end{pmatrix}, \tag{22}$$

где $l_1,...,l_k$ - компоненты матрицы L (см.(20)), а насчет самих $l_1,...,l_k$ мы предполагаем наличие ограничения $|l_r| \le c,\ r=\overline{1,k}$, где c - некоторое заранее заданное положительное число.

В силу (13) компоненты M_{ij} матрицы TM имеют следующий вид: $M_{ij}=a_{ij}+\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\cdot l_{kj}$, где a_{ij} – элементы матрицы A, c_{ik} – элементы матрицы $(I-Q(B))$, l_{kj} – элементы матрицы L. Здесь $i:\overline{1,n},\ j:\overline{1,n}$.

Для матрицы TM будем использовать следующую норму

$$\| TM \| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | M_{ij} |.$$

Очевидно, что $\| TM \| \le \sum_{i=1,j=1}^{n,n} |a_{ij}| + n\sum_{i=1,j=1}^{n,n} |c_{ij}|\cdot|c|$.

Вернемся к условию (14).

Для его выполнения нужно получить матрицу e^{TM} в параметрическом виде. Воспользуемся разложением

$$e^{TM}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(TM)^i}{i!}, \tag{23}$$

$$\| e^{TM} \| \le \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\| TM \|^i}{i!}. \tag{24}$$

Найти сумму ряда (23) с необходимой точностью можно численными методами. Будем считать значение частичной суммы (24) для $\| e^{TM} \|$, добавляя к сумме новые слагаемые до тех пор, пока после взятия $q+1$ слагаемого остаточный член данного ряда, взятый в форме Лагранжа, не будет удовлетворять ограничению

$$R_q(\| TM \|)=\frac{e^{\Theta\|TM\|}}{(q+1)!}\| TM \|^{q+1} \le \varepsilon_1, 0<\Theta<1,$$

где

$$|l_r| \le c,\ r=\overline{1,k}, \tag{25}$$

где ε_1 – достаточно малое число.

Перепишем ограничение (25) по другому, избавившись от Θ, с помощью следующей оценки.

$$R_q(\| TM \|)=\frac{e^{\Theta\|TM\|}}{(q+1)!}\| TM \|^{q+1} < \frac{e^{\|TM\|}}{(q+1)!}\| TM \|^{q+1} < \varepsilon_1,\ 0<\Theta<1. \tag{26}$$

Найдя соответствующую частичную сумму ряда (23), получим

$$e^{TM}\approx\begin{pmatrix} g_{11}(l_1,...,l_k) & g_{12}(l_1,...,l_k) & ... & g_{1n}(l_1,...,l_k) \\ g_{21}(l_1,...,l_k) & g_{22}(l_1,...,l_k) & ... & g_{2n}(l_1,...,l_k) \\ . & . & . & . \\ g_{n1}(l_1,...,l_k) & g_{n2}(l_1,...,l_k) & ... & g_{nn}(l_1,...,l_k) \end{pmatrix}, \tag{27}$$

где g_{ij} $i:\overline{1,n},\ j:\overline{1,n}$ компоненты полученной матрицы e^{TM}.

Далее можно записать уравнение (14)

$$B^{-}=\begin{pmatrix}1.9068812916540048 & 0.0442298405548155 & 0 & 0\\ 0.8902730995491143 & -0.1110643696384975 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad (28)$$

покомпонентно. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} g_{11}x_{01}+g_{12}x_{02}+\ldots+g_{1n}x_{0n}=x_{11},\\ g_{21}x_{01}+g_{22}x_{02}+\ldots+g_{2n}x_{0n}=x_{12},\\ \ldots\\ g_{n1}x_{01}+g_{n2}x_{02}+\ldots+g_{nn}x_{0n}=x_{1n}, \end{cases} \qquad (29)$$

где для краткости опущены параметры. Теперь поставленная задача сводится к вычислительной задаче о существовании решения системы уравнений (29) на $k+n$-мерном параллелепипеде $|l_r|\le c,\ r=\overline{1,k},\ \alpha_i\le x_{Ti}\le\beta_i$.

Рассмотрим вычислительную задачу.

Если при данных компонентах начальных краевых значений $x_{01},x_{02},\ldots,x_{0n}$ *система уравнений (29) имеет корни* $l_1,l_2,\ldots,l_k,x_{T1}^*,x_{T2}^*,\ldots,x_{Tn}^*$, *каждый из которых удовлетворяет ограничению* $|l_r|\le c,\ r=\overline{1,n}\ \ \alpha_i\le x_{Ti}^*\le\beta_i\ \ i=\overline{1,n}$, *то при взятой конечной точке* $x_T^*=(x_{T1}^*,x_{T2}^*,\ldots,x_{Tn}^*)$ *задача обратной связи также разрешима.*

В этом случае существует матрица M, а благодаря выполнению (19) и матрица K.

Систему уравнений (29) относительно $l_1,\ldots,l_k$ можно решать численными методами. Предлагается следующая технология решения. Пусть

$$g_{i1}x_{01}+g_{i2}x_{02}+\ldots+g_{in}x_{0n}-x_{Ti}=h_i(l_1,\ldots,l_k).$$

Тогда решение системы уравнений (29) сводится к поиску минимума функции

$$H(l_1,\ldots,l_k)=\sum_{s=1}^{n}h_s^2 \qquad (30)$$

на $k+n$-мерном параллелепипеде $|l_r|\le c,\ r=\overline{1,k},\ \alpha_i\le x_{Ti}\le\beta_i$.

Будем находить этот минимум численным методом, показанным в [8].Если $lx^*=(l_1^*,\ldots,l_k^*,x_{T1}^*,x_{T2}^*,\ldots,x_{Tn}^*)$, - точка в которой функция принимает наименьшее значение, а само наименьшее значение удовлетворяет ограничению $H(lx^*)\le\varepsilon_2$, где ε_2 - достаточно малое число, то будем считать, что точка $lx^*=(l_1^*,\ldots,l_k^*,x_{T1}^*,x_{T2}^*,\ldots,x_{Tn}^*)$ является корнем системы уравнений (29), иначе будем считать, что система уравнений на $k+n$-мерном параллелепипеде $|l_r|\le c,\ r=\overline{1,k}\ \ \alpha_i\le x_{Ti}\le\beta_i$ корней не имеет.

6.Применение полученного результата для решения практического примера

Рассмотрим пример, иллюстрирующий выполнение показанных в данной статье технологий.

Требуется проверить систему, описывающую движение самолета с вертикальным взлетом и посадкой, на возможность перехода с помощью матрицы обратной связи из заданной начальной точки в конечную точку, принадлежащую заданному диапазону, на участке времени в 6 минут. Его линеаризованная модель движения имеет вид.

$$\begin{pmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\\ \dot x_3\\ \dot x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555\\ 0.0482 & -1.0100 & 0.0024 & -4.0208\\ 0.1002 & 0.3681 & -0.7070 & 1.4200\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}+ \qquad (31)$$

$$\begin{pmatrix}0.4422 & 0.1761 & 0 & 0\\ 3.5446 & -7.5922 & 0 & 0\\ -5.5200 & 4.4900 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\end{pmatrix}.$$

Здесь приняты следующие обозначения для фазовых переменных:

x_1 – горизонтальная скорость в узлах ,

x_2 – вертикальная скорость в узлах ,

x_3 – скорость изменения угла наклона относительно поперечной оси ,

x_4 – угол наклона относительно поперечной оси.

Управлениями в системе являются:

u_1 – входной сигнал, используемый для управления движением в горизонтальном направлении ;

u_2 – входной сигнал, используемый для управления движением в вертикальном направлении.

Здесь u_3, u_4 – фиктивные компоненты управления, взятые для того, чтобы сделать матрицу управления квадратной. Модель взята из [9].

Так как время в данной задаче взято в секундах, следует перейти к измерению времени в часах, сделав соответствующую замену переменных. Поскольку каждое слагаемое в правой части модели (31) имеет единицу измерения, идентичную единице измерения производной в левой части, то линейная замена переменных не отразится на виде системы уравнений. Аналогично можно перейти от измерения скорости в узлах к измерению в км/ч. После такой замены переменных интересующий нас участок времени будет [0;0.1]. То есть $T = 0.1$ часа.

Пусть даны следующие начальные краевые условия:

$x_1(0) = 250,\ x_2(0) = 50,\ x_3(0) = 50,\ x_4(0) = 18.$ (32)

Конечную точку для перехода будем искать в следующем диапазоне:

$$\begin{aligned}&240 \le x_1(0.1) \le 250,\\&10 \le x_2(0.1) \le 20,\\&80 \le x_3(0.1) \le 100,\\&15 \le x_4(0.1) \le 30.\end{aligned} \qquad (33)$$

Для того, чтобы записать матрицу M в виде (20), найдем матрицы $Q(B)$ и $I - Q(B)$.

$$\mathrm{Im(B)} = \left\{\begin{pmatrix} 0.4422v_1 + 0.1761v_2 \\ 3.5446v_1 - 7.5922v_2 \\ -5.5200v_1 + 4.4900v_2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$

где v_1, v_2 – произвольные числа.

Или, введя замены $0.4422v_1 + 0.1761v_2 = y_1$, $3.5446v_1 - 7.5922v_2 = y_2$, получим

$$Im(B) = \left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ -6.5286y_1 - 0.7248y_2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Тогда

$$CokerB = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6.5286y_1 + 0.7248y_2 + y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}\right\},$$

следовательно $Q(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6.5286 & 0.7248 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда

$$I - Q(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6.5286 & -0.7248 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Используем произвольную матрицу

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix}.$$

Тогда пользуясь (20), легко подсчитать матрицу M:

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -0.0366 + l_{11} & 0.0271 + l_{12} & 0.0188 + l_{13} & -0.4555 + l_{14} \\ 0.0482 + l_{21} & -1.0100 + l_{22} & 0.0024 + l_{23} & -4.0208 + l_{24} \\ \hat{l}_1 & \hat{l}_2 & \hat{l}_3 & \hat{l}_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\hat{l}_1 = 0.1002 - 6.5286l_{11} - 0.7248l_{21}, \hat{l}_2 = 0.3681 - 6.5286l_{12} - 0.7248\mathrm{l}_{22},$$

$$\hat{l}_3 = -0.7070 - 6.5286l_{13} - 0.7248l_{23}, \hat{l}_4 = 1.4200 - 6.5286l_{14} - 0.7248\mathrm{l}_{24},$$

а $\hat{l}_1,...,\hat{l}_4$ введены для менее громоздкой записи матрицы M.

Возьмем для быстроты вычисления на компьютере $l_{11} = 0.0366,\ l_{13} = -0.0188,$ $l_{22} = 1.0100, l_{24} = 4.0208$ и разложим матрицу $e^{0.1M}$ в ряд (23) при $|\,l_r\,| \le 1.5,\ r = \overline{1,k},$ требуя, чтобы ограничение для остаточного члена (26) было ≤ 0.000001.

Тогда M примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.0271+l_{12} & 0 & -0.4555+l_{14} \\ 0.0482+l_{21} & 0 & 0.0024+l_{23} & 0 \\ \hat{l}_1 & \hat{l}_2 & \hat{l}_3 & \hat{l}_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\hat{l}_1 = -0.1387 - 0.7248 l_{21}$, $\hat{l}_2 = -0.3639 - 6.5286 l_{12}$, $\hat{l}_3 = -0.5843 - 0.7248 l_{23}$, $\hat{l}_4 = -1.4943 - 6.5286 l_{14}$.

Через 108 итераций получим матрицу $e^{0.1M}$ в виде

$$e^{0.1M} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{pmatrix}. \qquad (34)$$

Здесь опущена полная запись многочленов $g_{ij}(l_{12}, l_{14}, l_{21}, l_{23}), i = \overline{1,4}, j = \overline{1,4},$ из-за ее громоздкости.

На основании (29) составим систему уравнений относительно $g_{ij}(l_{12}, l_{14}, l_{21}, l_{23}), i = \overline{1,4}, j = \overline{1,4}$:

$$\begin{cases} h_1(l_{12}, l_{14}, l_{21}, l_{23}) = g_{11}x_1(0) + g_{12}x_2(0) + g_{13}x_3(0) + \\ + g_{14}x_4(0) - x_1(0.1) = 0, \\ h_2(l_{12}, l_{14}, l_{21}, l_{23}) = g_{21}x_1(0) + g_{22}x_2(0) + g_{23}x_3(0) + \\ + g_{24}x_4(0) - x_2(0.1) = 0, \\ h_3(l_{12}, l_{14}, l_{21}, l_{23}) = g_{31}x_1(0) + g_{32}x_2(0) + g_{33}x_3(0) + \\ + g_{34}x_4(0) - x_3(0.1) = 0, \\ h_4(l_{12}, l_{14}, l_{21}, l_{23}) = g_{41}x_1(0) + g_{42}x_2(0) + g_{43}x_3(0) + \\ + g_{44}x_4(0) - x_4(0.1) = 0, \\ h_5(l_{12}, l_{14}, l_{21}, l_{23}) = g_{51}x_1(0) + g_{52}x_2(0) + g_{53}x_3(0) + \\ + g_{54}x_4(0) - x_5(0.1) = 0, \\ h_6(l_{12}, l_{14}, l_{21}, l_{23}) = g_{61}x_1(0) + g_{62}x_2(0) + g_{63}x_3(0) + \\ + g_{64}x_4(0) - x_6(0.1) = 0. \end{cases} \qquad (35)$$

Решим систему уравнений (35) способом, описанным в (30), используя условия (32) и диапазоны (33). Получим решение

$$l_{12} = -0.03966808319091797,$$
$$l_{14} = -0.05454540252685547,$$
$$l_{21} = -0.1362619400024414,$$
$$l_{23} = -0.022534594735589053.$$

Допустимой же конечной точкой из диапазона, в которую можно осуществить переход с помощью матрицы обратной связи, будет точка

$$x_1(0.1) = 246.67622089385986,\ x_2(0.1) = 15.901398658752441,$$
$$x_3(0.1) = 80.0,\ x_4(0.1) = 24.565318822860718. \qquad (36)$$

При полученной точке x_1 и найденных компонентах l значение функции H из (30) равно $1.6115109247039072 \cdot 10^{-9}$, что достаточно близко к нулю.

Далее вернемся к выражению (21) и найдем матрицу K.

Найдем для начала B^- и $P(B)$.

Т.к. $Im(B)$ найдено выше, а $Ker(B) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \right\}$, то $Coim(B) = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, где z_1, z_2, z_3, z_4 произвольные числа.

Отсюда, пользуясь найденным ранее $Im(B)$, находим

$$B^- = \begin{pmatrix} 1.9068812916540048 & 0.0442298405548155 & 0 & 0 \\ 0.8902730995491143 & -0.11106436963849751 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ P(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, благодаря найденной ранее матрице M, найдем матрицу K по формуле (21).

Получим

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{pmatrix}, \qquad (37)$$

где
$K_{11} = 0.009523416474558385$,
$K_{12} = -0.711751118164998$,
$K_{13} = -0.04581638360432018$,
$K_{14} = -0.8622767333391754$,
$K_{21} = 0.1839224601643968$,
$K_{22} = -0.46532928709038907$,
$K_{23} = 0.008290771322148678$,
$K_{24} = -0.9321706631798479$, а $K_{31}, ..., K_{44}$ – произвольные числа.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Хлебников М.В., Щербаков П.С.Ограниченное линейное управление оптимальное по квадратичному критерию специального вида // Труды ИСА РАН. 2013. Т.63. №2. С. 86–89.

2 Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 273 с.

3 Поляк Б.Т., Щербаков П.С., М.В. Хлебников Управление линейными системами при внешних возмущениях:техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014. 560 с.

4. Хлебников М.В. Управление линейными системами при внешних возмущениях // Автоматика и Телемеханика. 2016. №7. С. 20–32.

5. Поляк Б.Т., Щербаков П.С., Хлебников М.В. Разреженная обратная связь в линейных системах управления // Автоматика и Телемеханика. 2014. №12. С.13–27.

6. Кревенцов Е.Г. Сосредоточение спектра полюсов в точке при компенсационном подходе к синтезу матрицы обратной связи // Тр. 12 Всерос. сов. по пробл. упр. (ВСПУ-2014). Москва, 16-19 июня 2014 г. М : ИПУ РАН, 2014. С. 183–192.

7. Зубова С.П. О критериях полной управляемости дескрипторной системы. Полиномиальное решение задачи управления при наличии контрольных точек. // Автоматика и Телемеханика. 2011. №1. С. 27–41.

8. Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках бэйсик, Фортран и Паскаль. М.: РАСКО,1991. 272 с.

9. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. 832 с.

Litvinov L.F.

ON THE CONSTRUCTION OF FEEDBACK IN THE PROBLEMS OF CONTROL OF LINEAR DYNAMICAL SYSTEMS

The problem of constructing a linear state feedback for a linear dynamical system by the method of expanding a parametrically given matrix into a series, and further solving the necessary equations is considered. To solve the equations, the method of minimizing the special function is used. A practical example of using this method for searching the feedback matrix, which allows to correct the control over the movement of an aircraft depending on its state in real time, is given.

***Key words**: linear dynamic system, control, feedback, feedback matrix, matrix exponent, finding the minimum of the function numerically, plane with vertical take-off and landing.*

Литвинов Дмитрий Анатольевич, аспирант кафедры математического анализа.
Воронежский государственный университет.
Адрес: Россия, 394018, Воронеж, Универсистетская площадь, д. 1.
E-mail:d77013378@yandex.ru