

Вендин С. В., д-р техн. наук, проф.  
Белгородская государственная сельскохозяйственная академия им.В.Я.Горина

## К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ С МНОГОСЛОЙНЫМ СФЕРИЧЕСКИМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ОБЪЕКТОМ

elapk@mail.ru

Рассмотрены вопросы расчета электромагнитных полей в многослойных диэлектрических объектах сферической формы при СВЧ обработке. Дается общая постановка задачи, в которой объект рассматривается как внутренняя сфера, окруженная сферическими слоями. Каждый объект характеризуется соответствующими электрофизическими характеристиками, характерными для диэлектрических сред.

В основу решения положены уравнения Максвелла для изотропной среды при отсутствии электрических зарядов. Приводится общее решение для внутренней и внешней задачи, когда объект взаимодействует с плоской, монохроматической, линейно-поляризованной электромагнитной волной. Решение представлено в виде сумм бесконечного ряда по произведениям функций Бесселя, цилиндрическим функциям Ганкеля второго рода и присоединенным функциям Лежандра.

**Ключевые слова:** СВЧ, диэлектрический объект, слоистый, сферический, электромагнитная волна, напряженность электромагнитного поля, электрическое поле, магнитное поле, электродинамический потенциал.

При СВЧ обработке диэлектрических объектов для комплексного решения проблемы необходимо исследование вопросов распространения и отражения электромагнитных волн (ЭМВ) применительно к технологическим процессам обработки. Одной из таких технологических задач является обработка слоистых сферических объектов (драже, гранулированные семена, пораженные вредителем зерно и др.).

В научной литературе встречается решение задачи о рассеянии плоских волн для случая однородной сферической частицы [1,2 и др.], но, видимо в отсутствии практической необходимости, решение для многослойных сферических объектов многими авторами просто не рассматривалось.

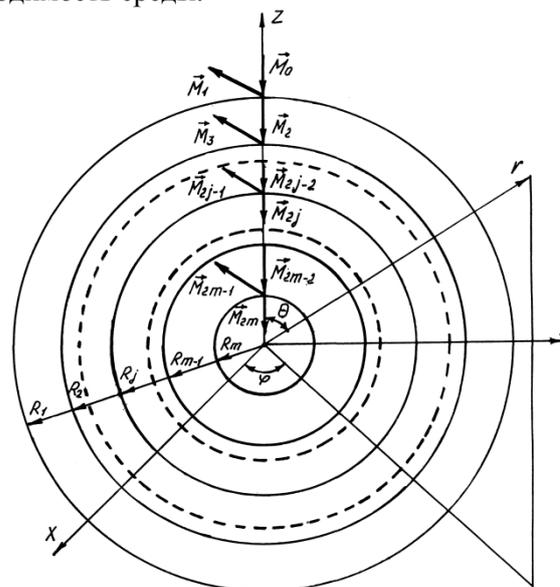
В связи с этим, приведем решение задачи взаимодействия плоской, монохроматической, линейно-поляризованной электромагнитной волны с многослойными диэлектрическими объектами сферической формы. Расчетная схема задачи приведена на рис. 1.

Будем полагать также, что объект является несовершенным диэлектриком, а электрофизические параметры внешней среды  $\mu, \epsilon, \sigma$  и каждого слоя объекта  $\mu_j, \epsilon_j, \sigma_j$  являются постоянными и однородными по всему объему.

Для несовершенных диэлектриков будем полагать, что средняя объемная плотность электрического заряда  $\rho$  равна нулю. Тогда, при незначительных изменениях электрофизических параметров вдоль линейных размеров для изотропной среды при  $\rho = 0$  с достаточной степенью достоверности имеют место соотношения:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \vec{J} = \sigma \vec{E}, \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (1)$$

где  $\epsilon$  - диэлектрическая проницаемость среды;  $\mu$  - магнитная проницаемость среды;  $\sigma$  - проводимость среды.



$\vec{M}_0, \vec{M}_{2j}$  - падающая ЭМВ,  $\vec{M}_{2j-1}$  - отраженная ЭМВ,  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Рис. 1. К расчету напряженности электромагнитного поля в многослойном диэлектрическом объекте сферической формы

В этом случае электродинамические аспекты состояния материальной среды, которая неподвижна относительно координатных осей, описываются уравнениями Максвелла [1, 2]:

$$\text{rot} \vec{H} = \left[ \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right], \text{div} \vec{E} = 0,$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \text{div } \vec{H} = 0, \quad (2)$$

где  $\vec{D}$  - электрическая индукция;  $\vec{E}$  - напряженность электрического поля;  $\vec{H}$  - напряженность магнитного поля;  $\vec{B}$  - магнитная индукция;  $\vec{J}$  - плотность электрического тока;

Для решения уравнений (2) весьма эффективно использовать метод комплексных величин, т.е. принимать, что напряженности электрического и магнитного полей в любой точке пространства равны действительным частям комплексных векторов  $\vec{E}, \vec{H}$  вида  $\vec{A} e^{i\omega t}$ , где  $\vec{A}$  - комплексная величина, не зависящая от времени  $t$ .

Кроме того, полезно использовать комплексный вектор  $\vec{M}$ , объединяющий напряженности электрического и магнитного полей. В таком случае, обозначим:

$$\vec{H} \pm i\nu \vec{E} = \vec{M} e^{i\omega t}, \text{ или } \vec{H} \pm i\nu \vec{E} = \vec{M}.$$

Тогда комплексный вектор  $\vec{M}$  в соответствии с (2.3)-(2.5) должен удовлетворять уравнениям:

$$\text{rot } \vec{M} = \pm k \vec{M}, \text{div } \vec{M} = 0, \quad (4)$$

где  $k = \mu\omega v$  - коэффициент распространения ЭМВ;  $v = [(\epsilon\omega - i\sigma)/\mu\omega]^{\frac{1}{2}}$  - характеристическая проводимость среды;  $\omega = 2\pi f$  - круговая частота ЭМВ;  $f$  - частота ЭМВ.

Используя метод решения для однородной сферической частицы, приведенный в работе [1],

для компонент вектора  $\vec{M}$ : в сферических координатах будем полагать:

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Omega) + k^2 r\Omega, \\ M_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (r\Omega) \pm \frac{k}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (r\Omega), \\ M_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} (r\Omega) \pm \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r\Omega), \end{aligned} \quad (5)$$

где функция  $\Omega = \Omega_r = U \pm iV$  является электродинамическим потенциалом, удовлетворяющим уравнению  $\nabla^2 \Omega + k^2 \Omega = 0$ .

В этом случае функции  $r\Omega$  можно представить в виде сумм бесконечного ряда:

для сходящихся (падающих) волн

$$\begin{aligned} r\Omega &= rU_c + irV_c, \\ rU_c &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(kr) P_n^1(\cos \theta) \cos \varphi, \end{aligned} \quad (6)$$

$$rV_c = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \psi_n(kr) P_n^1(\cos \theta) \sin \varphi.$$

для расходящихся (отраженных) волн

$$\begin{aligned} r\Omega &= rU_p + irV_p, \\ rU_p &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \xi_n(kr) P_n^1(\cos \theta) \cos \varphi, \end{aligned} \quad (7)$$

$$rV_p = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \xi_n(kr) P_n^1(\cos \theta) \sin \varphi,$$

где  $a_n, b_n, c_n, d_n$  - постоянные коэффициенты;  $P_n^1(\cos \theta)$  - присоединенные функции Лежандра;

$$\begin{aligned} \psi_n(kr) &= [\pi kr / 2]^{\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr), \\ \xi_n(kr) &= [\pi kr / 2]^{\frac{1}{2}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr), \end{aligned} \quad (8)$$

$J_{n+\frac{1}{2}}(kr), H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr)$  - соответственно функции

Бесселя первого рода и цилиндрические функции Ганкеля второго рода,

В том случае, когда падающая на сферический объект, плоская монохроматическая электромагнитная волна имеет электрический вектор, поляризованный, например, параллельно координатной оси  $Y$ , её компоненты определяются в соответствии с выражениями:

$$(M_r, M_\theta, M_\varphi) = e^{ikr \cos \theta \pm i\varphi} (\sin \theta, \cos \theta, \pm i), \quad (9)$$

а соответствующая ей функция  $\Omega_0$  имеет разложение [171]:

$$r\Omega_0 = k^{-2} e^{\pm i\varphi} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \psi_n(kr) P_n^1(\cos \theta). \quad (10)$$

Постоянные коэффициенты в выражениях (6)-(7) определяются из условий непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей на границах  $r = R_1, R_2, \dots, R_m$ .

Функцию  $r\Omega_0$  целесообразно представить в виде

$$r \dot{\Omega}_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,0} \Psi_n(kr) P_n^1(\cos \theta) e^{\pm j\varphi} \quad (11)$$

В таком случае, электромагнитное поле вне сферы и поле внутри сферы для каждого слоя (рис.1) описывается выражениями вида:

$$r \dot{U}_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,0} \Psi_n(k_0 r) P_n^1(\cos \theta) \cos \varphi,$$

$$r \dot{V}_0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_{n,0} \Psi_n(k_0 r) P_n^1(\cos \theta) \sin \varphi,$$

$$r \dot{U}_{2j-1} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,2j-1} \zeta_n(k_{j-1} r) P_n^1(\cos \theta) \cos \varphi,$$

$$r \dot{V}_{2j-1} = \sum_{n=1}^{\infty} B_{n,2j-1} \zeta_n(k_{j-1} r) P_n^1(\cos \theta) \sin \varphi, \quad (12)$$

$$r \dot{U}_{2j} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,2j} \Psi_n(k_j r) P_n^1(\cos \theta) \cos \varphi,$$

$$r \dot{V}_{2j} = \sum_{n=1}^{\infty} B_{n,2j} \Psi_n(k_j r) P_n^1(\cos \theta) \sin \varphi,$$

$j = 1, 2, 3, \dots, m,$

где  $A_{n,0} = B_{n,0} = k^{-2} j^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}.$

Коэффициенты  $A_{n,l}$  и  $B_{n,l}$  ( $l=1, 2, \dots, 2m$ ) однозначно определяются системами уравнений:

$$AX = C, BY = D, \quad (13)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & 0 & 0 & \bullet & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 & 0 & \bullet & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & a_{2m-2}^{2m-1} & a_{2m-1}^{2m-1} & a_{2m}^{2m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & a_{2m-2}^{2m} & a_{2m-1}^{2m} & a_{2m}^{2m} \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} A_{n,1} \\ A_{n,2} \\ A_{n,3} \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ A_{n,2m} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ 0 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} C_p \neq 0, p = 1, 2 \\ C_p = 0, p = 3, 4, \dots, 2' \end{matrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & 0 & 0 & \bullet & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} & 0 & 0 & \bullet & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & b_{2m-2}^{2m-1} & b_{2m-1}^{2m-1} & b_{2m}^{2m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & b_{2m-2}^{2m} & b_{2m-1}^{2m} & b_{2m}^{2m} \end{bmatrix}.$$

Формулы для определения значений ненулевых элементов векторов-столбцов  $C$  и  $D$  ранга  $2m$  приведены в таблице 1.

Таблица 1

$C_1$	$C_2$	$d_1$	$d_2$
$-\frac{k_0}{v_0} A_{n,0} \psi_n(k_0 R_1)$	$-k_0 A_{n,0} \psi'_n(k_0 R_1)$	$-k_0 B_{n,0} \psi_n(k_0 R_1)$	$-\frac{k_0}{v_0} B_{n,0} \psi'_n(k_0 R_1)$

Формулы для определения значений ненулевых элементов квадратных матриц **A** и **B** ранга **2m** приведены в таблицах 2-3, где индекс **S** не может иметь значений менее 1 и более **2m**.

При пользовании таблицами 2-3 следует иметь в виду, что не существует элементов определенных следующим образом:

- 1)  $j=1, P=2j-1=1, S=P-1=0;$
- 2)  $j=1, P=2j=2, S=P-2=0;$
- 3)  $j=m, P=2j-1=2m-1, S=P+2=2m+1;$
- 4)  $j=m, P=2j=2m, S=P+1=2m+1.$

Таблица 2

Формулы для определения значений элементов  $a_{S}^P$  квадратной матрицы **A** ранга **2m** (**p** - номер строки, **S** - номер столбца)

$\begin{matrix} P \\ S \end{matrix}$	P-2	P-1	P	P+1	P+2
$\begin{matrix} P= \\ 2j-1 \end{matrix}$	<b>0</b>	$\frac{k_{j-1}}{v_{j-1}} \psi_n(k_{j-1} R_j)$	$\frac{k_{j-1}}{v_{j-1}} \xi_n(k_{j-1} R_j)$	$-\frac{k_j}{v_j} \psi_n(k_{j-1} R_j)$	$-\frac{k_j}{v_j} \xi_n(k_j R_j)$
$\begin{matrix} P= \\ 2j \end{matrix}$	$k_{j-1} \psi'_n(k_{j-1} R_j)$	$k_{j-1} \xi'_n(k_{j-1} R_j)$	$-k_{j-1} \psi'_n(k_{j-1} R_j)$	$-k_j \xi'_n(k_j R_j)$	<b>0</b>
$j=1,2,\dots,m; P,S=1,2,\dots,2m$					

Таблица 3

Формулы для определения значений элементов  $b_{S}^P$  квадратной матрицы **B** ранга **2m** (**p** - номер строки, **S** - номер столбца)

$\begin{matrix} P \\ S \end{matrix}$	P-2	P-1	P	P+1	P+2
$\begin{matrix} P= \\ 2j-1 \end{matrix}$	<b>0</b>	$k_{j-1} \psi_n(k_{j-1} R_j)$	$k_{j-1} \xi_\delta(k_{j-1} R_j)$	$-k_{j-1} \psi_n(k_{j-1} R_j)$	$-k_j \xi_\delta(k_j R_j)$
$\begin{matrix} P= \\ 2j \end{matrix}$	$\frac{k_{j-1}}{v_{j-1}} \psi'_n(k_{j-1} R_j)$	$\frac{k_{j-1}}{v_{j-1}} \xi'_n(k_{j-1} R_j)$	$-\frac{k_j}{v_j} \psi'_n(k_{j-1} R_j)$	$-\frac{k_j}{v_j} \xi'_n(k_j R_j)$	<b>0</b>
$j=1,2,\dots,m; P,S=1,2,\dots,2m$					

В общем случае определители матриц **A** и **B** не равны нулю, следовательно, решение системы уравнений (13) однозначно определяет неизвестные коэффициенты  $A_{n,l}$  и  $B_{n,l}$  ( $l = 1, 2, \dots, 2m$ ). Непосредственный анализ и отыскание коэффициентов можно осуществлять любыми известными в математике методами решения систем уравнений. Например, используя метод определителей [3 и др.], можно сразу определять значения коэффициентов и получать решение для **j**-го слоя не проводя общего решения задачи. Однако важно заметить, что, согласно расчетной схеме задачи (рис.1), общая напряженность электрического и магнитного полей в **j**-м слое  $\vec{M}_{rj}$  будет определяться суммой напряженностей падающей и отраженной электромагнитных волн, т.е.

$$\vec{M} = \vec{M}_{2j} + \vec{M}_{2j+1}, \quad j=1,2,\dots,m-1. \quad (14)$$

Отметим, что полученное решение полностью определяет значение комплексного вектора  $\vec{M}$ . В тоже время, на практике, интерес представляет не сам вектор  $\vec{M}$ , а значения напряженностей электрического и магнитного полей. В связи с этим, учитывая, что при электромагнитных возмущениях в диэлектрической среде доминирующими являются волны электрического типа -  $\vec{V}$ , то напряженности электрического и магнитного полей можно рассчитать исходя из соотношений (3) и (5):

$$\vec{H}_r = 0, \quad \vec{E}_r = \frac{1}{v} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \vec{V}) + k^2 r \vec{V} \right],$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_\theta &= \frac{ik}{r \sin \theta} \frac{\partial(r \dot{V})}{\partial \varphi}, \quad \dot{E}_\theta = \frac{1}{vr} \frac{\partial^2(r \dot{V})}{\partial r \partial \theta}, \\ \dot{H}_\varphi &= -\frac{ik}{r} \frac{\partial(r \dot{V})}{\partial \theta}, \quad \dot{E}_\varphi = \frac{1}{vr \sin \theta} \frac{\partial^2(r \dot{V})}{\partial r \partial \varphi}. \end{aligned} \quad (15)$$

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бейтмен Г. Математическая теория распространения электромагнитных волн. М.: Изд. Наука, 1958. 180 с.
2. Фальковский О.Н. Техническая электродинамика. М.: Изд. Связь, 1978. 432 с.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Изд. Наука, 1984. 835 с.