Швачкин Е. Г., канд. техн. наук, доц.
Старооскольский технологический институт (филиал)
Национального исследовательского технологического университета «МИСиС»

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ВИБРАЦИОННОМ РЕЗАНИИ

eshvachkin@mail.ru

Сформулированы общие условия устойчивости вынужденных гармонических колебаний в системе с одной степенью свободы, что представляет большой практический интерес как с точки зрения получения стационарных технологических режимов, так и с целью их оптимизации.

Ключевые слова: *вибрационное резание, устойчивость, колебательная система, вынужденные колебания, самовозбуждающиеся колебания, автоколебания.*

При конструировании установки для вибрационного резания необходимо определить границы области устойчивости для случаев, если в колебательной системе возбуждаются только вынужденные колебания или если происходит сочетание вынужденных и самовозбуждающихся колебаний (автоколебаний). Резание в области неустойчивых колебаний нежелательно, так как, какая бы ни была совершенная вибрационная установка, теряется возможность управления возбуждаемыми колебаниями. На практике это приводит к ухудшению качества и точности обработанной поверхности, снижению стойкости инструмента и долговечности оборудования. В конечном итоге резание в области неустойчивых колебаний не обеспечивает стабильность технологического процесса. Способность системы регулировать поступление энергии для поддержания автоколебаний зависит от ее индивидуальных динамических особенностей: собственной частоты, формы колебаний и диссипации.

Основными работами, в которых рассмотрено значение упругой системы станка и дан подход к вибрациям станков как к задаче об устойчивости движения, являются исследования И. Тлусты [1] и В. А. Кудинова [2].

И. Тлусты решена частная задача устойчивости движения без затухания в упрощенной системе. Станок рассмотрен как колебательная система с двумя степенями свободы и координатной связью. Им доказано, что для возникновения автоколебаний в системе движение режущего инструмента относительно заготовки должно описываться неоднозначной траекторией, например, эллипсом. В качестве основной рекомендации по борьбе с самовозбуждающимися колебаниями И. Тлусты предложил соответствующим образом ориентировать оси жесткости станка. Недостатком этих работ является узкий и упрощенный подход к явлению потери устойчивости в станках, а выполненные расчеты имеют частный характер, и их совпадение с экспериментом в основном качественное.

Исследования В. А. Кудинова отличаются широким подходом к вибрациям станков, как к одному из частных случаев потери устойчивости в механических системах, что позволило привлечь к анализу устойчивости движения в станках достижения смежных наук, существенно продвинув изучение вибраций. Он обратил внимание на значение связей в станках и их влияние на устойчивость движения при резании, рассмотрел связи по координате, ее первой и второй производным по времени и показал, что при решении динамических задач в станках нельзя отрывать какой-либо узел от станка и всю динамику объяснить этим узлом. Кроме того, им отмечено, что неустойчивость в станках при резании нельзя объяснять только одним лишь процессом резания или одной упругой системой.

Современные отечественные и зарубежные ученые [3] в основном проводят теоретические и экспериментальные исследования условий потери устойчивости движения в станках основываясь на изучении автоколебаний. Однако в случае изучения устойчивости движения в станках при наличии источника вынужденных колебаний, включенного в процесс резания, такой подход может быть не всегда приемлем. Между тем отсутствует простая инженерная методика расчета колебательных систем на виброустойчивость. Поэтому в большинстве случаев на практике приходится сильно уменьшать режимы резания, тем самым, снижая производительность обработки.

Рассмотрим колебательную систему, состоящую из устройства для вибрационного точения с вибратором механического типа, работающую в области низких частот (20 – 150 Гц). При такой частоте колебаний резца оптимальная амплитуда колебаний составляет 30 – 300 мкм. В конструкции таких вибраторов присутствует эксцентриковый узел, задающий вынужденные колебания инструмента. Однако этот же узел является источником самовозбуждающихся колебаний. Для изучения условий устойчивости колебаний инструмента при вибрационном резании с использованием вынужденных колебаний гармонического типа примем допущение о том, что связь между элементами колебательной системы такова, что для однозначного определения геометрического расположения частей этой системы в пространстве достаточно только одной пространственной координаты, т. е. исследуемая колебательная система имеет одну степень свободы. Для дальнейшего анализа этой колебательной системы с одной степенью свободы введем обобщенную координату q, под которой будем подразумевать размах колебаний вершины резца, равный двойной амплитуде колебаний. В этой системе распределенные параметры заменим эквивалентными коэффициентами жесткости (C), демпфирования (K) и суммарной массой (M), включающей распределенную массу всей колебательной системы: станка, установки для вибрационного резания, резца и заготовки. На рассматриваемую замкнутую колебательную систему действуют реакционные силы: инерции $P_{ин}$, демпфирования $P_{демп}$, упругости $P_{упр}$ и возмущающая – равнодействующая сила резания P_R.

В соответствии с принятыми обозначениями представим действующие силы в виде векторных выражений [4]. Для силы инерции:

$$\overline{P_{ин}} = -M \cdot \frac{d^2q}{dt^2}, \qquad (1)$$

силы демпфирования:

$$\overline{P_{демп}} = -K \cdot \frac{dq}{dt}, \qquad (2)$$

силы упругости:

$$\overline{P_{упр}} = -C \cdot q, \qquad (3)$$

где $\frac{d^2q}{dt^2}$, $\frac{dq}{dt}$, q – ускорение, скорость и перемещение вершины резца в обобщенной системе координат.

Вследствие того, что при вибрационном резании изменяется толщина среза, равнодействующая сила резания P_R также изменяет величину. Причем, В. Н. Подураев в монографии [5] указывает, что сила резания изменяется не прямо пропорционально изменению толщины среза, а значительно медленнее. Поэтому, в общем случае, если вершина резца совершает гармонические колебания, то сила резания описывается не гармонической функцией, а периодической функцией общего вида. Однако в первом приближении с допустимой погрешностью можно принять квазигармоническое изменение силы резания от перемещения инструмента с таким же периодом [5]:

$$P_R(t) = P_R \cdot \cos\omega t, \qquad (4)$$

где P_R – максимальная величина равнодействующей силы резания, т. е. ее амплитудное значение; ω - круговая частота вынужденных колебаний.

Для рассматриваемой колебательной системы в соответствии с принципом Даламбера имеет место равенство:

$$M \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + K \cdot \frac{dq}{dt} + C \cdot q = P_R \cdot \cos\omega t. \qquad (5)$$

Рассмотрим колебательную систему с нелинейной характеристикой вязкого демпфирования. Ввиду того, что колебания инструмента подчиняются гармоническому закону, раз разложим коэффициент вязкого демпфирования в ряд синуса, но ограничимся только первыми двумя членами этого ряда:

$$K = -\alpha_1 \cdot \frac{d}{dt} q + \gamma_1 \cdot \frac{d}{dt} q^3, \qquad (6)$$

где α_1, γ_1 – некоторые коэффициенты.

Разделив обе части уравнения (5) на величину M и введя обозначения:

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{M}, \quad \gamma = \frac{\gamma_1}{M}, \quad \omega_0^{\ 2} = \frac{C}{M}, \quad p = \frac{P_R}{M},$$

получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2q}{dt^2} - \alpha \cdot \frac{dq}{dt} + \gamma \cdot \frac{d}{dt}\left(q^3\right) + \omega_0^{\ 2} \cdot q = p \cdot \cos\omega t, \qquad (7)$$

где ω_0 – круговая частота свободных колебаний рассматриваемой системы.

Периодическое решение уравнения (7) было впервые получено Ван дер Полем [6] и представляется в виде:

$$q(t) = b_1(t) \cdot \sin\omega t + b_2(t) \cdot \cos\omega t, \qquad (8)$$

где $b_1(t), b_2(t)$ считаются медленно изменяющимися функциями времени.

Воспользовавшись для вычисления q^3 в уравнении (7) соотношениями:

$$\sin^3\theta = \frac{3}{4} \cdot \sin\theta - \frac{1}{4} \cdot \sin 3\theta,$$

$$\cos^3\theta = \frac{3}{4} \cdot \cos\theta - \frac{1}{4} \cdot \cos 3\theta,$$

получим

$$q^3 = \frac{3}{4} \cdot \left(b_1^2 + b_2^2\right) \cdot \left(b_1 \cdot \sin\omega t + b_2 \cos\omega t\right) + \ldots \qquad (9)$$

где члены с частотой 3ω отброшены.

Дифференцируя уравнение (8) и, используя выражение (9), получим:

$$2 \cdot \dot{b}_1 - b_2 \cdot \Delta - \alpha \cdot b_1 \cdot \left(1 - \frac{b^2}{a_0^2}\right) = 0, \qquad (10)$$

$$2\cdot \dot{b}_2 + b_1\cdot\Delta - \alpha\cdot b_2\cdot\left(1-\frac{b^2}{a_0^2}\right) = -\frac{p}{\omega},$$

где

$$a_0^2 = \frac{\alpha}{\frac{3}{4}\cdot\gamma};\ b^2 = b_1^2 + b_2^2,\ \Delta = 2\cdot(\omega-\omega_0). \quad (11)$$

Физический смысл величины b есть амплитуда результирующих колебаний системы с частотой ω, а a_0 – амплитуда свободных нелинейных колебаний с частотой ω_0, что непосредственно следует из уравнений (10). Если рассматривать свободные колебания, т. е. положить $p = 0$ и $\Delta = 0$, то $a_0 = b$, так как b_1 и b_2 одновременно не обращаются в нуль, а $\alpha \neq 0$. А это значит, что вся система колеблется с амплитудой свободных колебаний и частотой ω_0. В случае $p \neq 0$ величина амплитуды результирующих колебаний b зависит от величины возмущающей силы, а частота колебания системы определяется частотой возмущения.

Решение уравнений (10) для зарезонансной зоны колебаний, на основе метода А. А. Андронова [7], было предложено А. П. Сергиевым в работе [8]. Для этого необходимо ввести новые обозначения:

$$x = \frac{b_1}{a_0},\quad y = \frac{b_2}{a_0},\quad z^2 = x^2 + y^2,\quad \tau = \frac{t\cdot\alpha}{2},$$

$$\sigma = \frac{\Delta}{\alpha},\quad F = -\frac{p}{a_0\cdot\alpha\cdot\omega}, \quad (12)$$

где z – отношение амплитуды вынужденных колебаний к амплитуде свободных колебаний; τ, σ, F – соответственно безразмерные время, расстройка и возмущающая сила.

Подставив новые величины в уравнение (10), получим выражения

$$\frac{dx}{d\tau} = \sigma\cdot y + x\cdot(1-z^2), \quad (13)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = F - \sigma\cdot x + y\cdot(1-z^2),$$

Тогда решение (8) первоначального уравнения (7) в новых переменных запишется в виде

$$\frac{q}{a_0} = x\cdot\sin\omega t + y\cdot\cos\omega t, \quad (14)$$

где x и y – переменные, заданные уравнениями (13).

Наибольший интерес представляют периодические решения дифференциального уравнения (7) с частотой возмущающей силы ω, которым соответствуют решения x = const и y = const, т. е. точки (x, y), в которых $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ одновременно обращаются в нуль. Таким образом, решение сводится к отысканию особых точек, расстояние которых до начала координат зависит от отношения амплитуды вынужденных колебаний к амплитуде свободных колебаний. Согласно основной идее А. А. Андронова, устойчивость любого частного гармонического решения определяется типом соответствующей особой точки. Если интегральные кривые уравнения (13) в плоскости xy имеют устойчивый предельный цикл, к которому стремятся все интегральные кривые, то x и y в выражении (14) стремятся к периодическим функциям. Тогда решение дифференциального уравнения (7) таково, что амплитуда и фаза начинают медленно, но периодически изменяться со временем, т. е. произойдет модуляция по амплитуде и фазе. В этом случае решение (14) может быть представлено в виде суммы двух гармонических колебаний с частотами ω_0 и ω, т. е. произойдет наложение двух простых колебаний, одного с частотой возмущения ω, и другого с частотой свободных колебаний ω_0; при этом свободные колебания не будут затухать. Таким образом, силы демпфирования в данном случае будут поддерживать свободные колебания, т. е. превращаться в силы «отрицательного демпфирования», и система будет устойчиво колебаться в режиме комбинационных колебаний. В результате этого увеличивается высота волнистости обработанной поверхности.

Для определения условий появления неустойчивых комбинационных колебаний проведем построение и исследование амплитудных кривых. Координаты особой точки (x_0, y_0) получим, приравняв нулю правые части уравнений (13):

$$\sigma\cdot y_0 + x_0\cdot(1-z_0^2) = 0 \quad (15)$$

$$F - \sigma\cdot x_0 + y_0\cdot(1-z_0^2) = 0,$$

где $z_0^2 = x_0^2 + y_0^2 = \rho$.

Определяя x_0 и y_0 из уравнений (15) через F и σ имеем

$$\rho\left[\sigma^2 + (1-\rho)^2\right] = F^2. \quad (16)$$

Полученное уравнение содержит σ^2, т. е. не зависит от знака «расстройки», что позволяет воспользоваться его анализом, изложенным в работе [6] для зарезонансной зоны. Уравнение (16) позволяет определить значение величины ρ для любой частоты гармонических колебаний при соответствующей величине амплитуды возмущения, изменение которых в широких пределах позволяет построить амплитудные кривые, симметричные относительно оси σ, в безразмерных координатах σ, ρ.

Возвращаясь к первоначальным параметрам, входящим в уравнение (7), условия примут вид:

$$\sigma = \frac{2\cdot(\omega-\omega_0)}{\alpha} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}, \rho = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 + \left(\frac{b_в}{a_0}\right)^2 < \frac{1}{2}$$

$$F^2 = \left(\frac{m_э\cdot\varepsilon\cdot\omega}{M\cdot a_0\cdot\alpha}\right)^2 \geq \frac{8}{27}, \qquad (17)$$

где b_0, $b_в$ – амплитуды свободных и вынужденных гармонических составляющих колебаний соответственно; $m_э$ – масса эксцентрично вращающихся деталей установки; ε – эксцентриситет для эксцентрично вращающихся деталей.

Из выражения (11) известно, что $\alpha = \frac{3}{4}\cdot\gamma\cdot a_0^2$. Принимая $q^2 \approx a_0^2$ и с учетом уравнения (6) после простой подстановки получим $\alpha \approx \frac{2\cdot K}{3}$, тогда условие потери устойчивости примет вид:

$$F = \frac{3\cdot m_э\cdot\varepsilon\cdot\omega}{2\cdot M\cdot a_0\cdot K} \geq 0{,}5443. \qquad (18)$$

Из выражения (18) на основании безразмерного параметра возмущающей силы получим условие устойчивости вынужденных колебаний:

$$F = \frac{3\cdot m_э\cdot\varepsilon\cdot\omega}{2\cdot M\cdot a_0\cdot K} \leq 0{,}5443. \qquad (19)$$

Если условие (19) не будет выполняться, то в системе возникнут комбинационные колебания, которые будут проявляться в появлении волнистости на обработанной поверхности.

Если колебания системы находятся в области неустойчивости, то на обработанной поверхности в продольном сечении будет получаться четко выраженная волнистость. Например, рассмотрим случай вибрационного точения заготовки диаметром 22 мм и длиной 300 мм при режимах резания t = 2,5 мм, S = 0,5 мм/об, v = 70 м/мин и параметрах колебаний A = 300 мкм, f = 25 Гц. Обработанная поверхность в продольном сечении имела высоту волнистости ≈ 0,5 мм со средним шагом 4,5 мм (рис. 1).

Таким образом, амплитуда свободных колебаний зависит прямо пропорционально от массы и эксцентриситета вращающихся деталей установки, частоты вынужденных колебаний и обратно пропорционально от суммарной массы колебательной системы, возмущающей силы и нелинейного коэффициента затухания. Обобщая проведенные исследования, сделан вывод, что частота собственных колебаний системы является индивидуальной технической характеристикой станка и зависит не только от ее эквивалентной жесткости и массы, но и от степени износа оборудования, дисбаланса шпиндельного вала, зазоров в подшипниках и т. д. Кроме того, правомерно предположить, что частота собственных колебаний будет зависеть от скорости резания, так как с изменением последней, коэффициенты жесткости и демпфирования также меняются.

Рис. 1. Обработанная поверхность заготовки при работе колебательной системы в области неустойчивых колебаний (увеличение х 2).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тлусты, И. Автоколебания в металлорежущих станках. / И. Тлусты. -М.: Машгиз, 1956. –80 с.

2. Кудинов, В. А. Методика испытания токарных станков средних размеров общего назначения на виброустойчивость при резании. / В. А. Кудинов, Т. С. Воробьева, С. И. Рубинчик. - М.: ОНТИ (ЭНИМС), 1961. – 44 с.

3. Юркевич, В. В. Испытания, контроль и диагностика металлообрабатывающих станков. / В. В. Юркевич, А. Г. Схиртладзе, В. П. Борискин. – Старый Оскол: ТНТ, 2011. – 552 с.

4. Крылов, Н. М. Введение в нелинейную механику. / Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов. - Киев: АН УССР, 1937. – 233 с.

5. Подураев, В. Н. Обработка резанием с вибрациями. / В. Н. Подураев, - М.: Машиностроение, 1970. – 350 с.

6. Стокер, Д. Д. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. / Д. Д. Стокер. – М.: Иностранная литература, 1952. – 264 с.

7. Андронов, А. А. Теория колебаний. / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. – М.: Физматгиз, 1959. – 915 с.

8. Сергиев, А. П. Отделочная обработка в абразивных средах. / А. П. Сергиев, Е. И. Антипенко. – Научное издание. – Старый Оскол, 1997. – 220 с.