Белецкий Э. В., канд. техн. наук, доц.
Харьковский торгово-экономический институт
Киевского национального торгово-экономического университета
Толчинский Ю. А., канд. техн. наук, доц.
Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ БИНГАМОВСКОЙ ЖИДКОСТИ С ПОПЕРЕЧНОЙ ЦИРКУЛЯЦИЕЙ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ ЧЕРВЯЧНОЙ МАШИНЫ

bileckyj@meta.ua

Предложено математическое описание продольного течения бингамовской жидкости с поперечной циркуляцией в прямоугольном канале червячной машины, полученные уравнения позволяют проводить моделирование разнообразных течений вязкопластических жидкостей.

Ключевые слова: *математическая модель, неньютоновские материалы, червячная машина, порог текучести, бингамовская жидкость.*

В основе многих важных процессов лежат знания закономерности течения высоковязких материалов. Эффективная организация проведения таких процессов зависит от особенностей течения высоковязких неньютоновских материалов. Такие движения порождают поля скорости и напряжений сдвига, которые выступают в качестве движущих сил и средств воздействия на материалы, обеспечивая протекание механофизических и механохимических превращений. Перемещение, в ходе которого возникают поля скорости и напряжений не может быть обеспечено насосами ввиду большой вязкости перерабатываемых материалов. Для этой цели используются червячные машины, специально предназначенные для воздействия на такие материалы [1 – 5]. Эти машины сочетают в себе способность к перемещению материала, со способностью к перемешиванию. Эти две способности являются предпосылками к эффективному механофизическому и механохимическому воздействию на материал.

Как правило, транспортирующая способность и способность силового (сдвигового) воздействия на материал, в известной степени, противоречат друг другу. Для оптимального комбинирования этих способностей необходимо рационально подобрать устройство рабочей камеры червячной машины, которая представляет собой совокупность последовательно соединенных каналов с различной геометрией. Каналы отличаются большим разнообразием своих поперечных сечений [1, 3, 4]. При анализе движения в канале различной формы отталкиваются от канала, имеющего прямоугольное поперечное сечение. Такой канал является основным, часто исходным при различных построениях. Течение в таком канале связано с реальным движением перерабатываемого червячного материала с помощью специально назначенных граничных условий [2, 5]. А именно, на границах прямоугольного канала задаются скорости движения этих границ, которые имеют как продольную (вдоль длины канала) так и поперечную составляющие. Величины этих составляющих определяются диаметром червяка, числом оборотов червяка и углом подъема винтовой линии [1, 2, 5]. Граничные скорости определяют поля скорости и напряжений внутри канала, связывая их с главными конструктивными (диаметр червяка и шаг) и режимными (число оборотов червяка) характеристиками червячной машины.

Целью настоящей работы является изучение движения бингамовского материала в прямоугольном канале с произвольным распределением продольных и поперечных составляющих граничных скоростей. Выбор такого материала продиктован значительной практической значимостью таких материалов и их распространенностью в пищевой и химической технологиях [6, 7]. В данной работе бингамовский материал изображается бингамовской жидкостью, которая имеет два постоянных параметра – вязкость μ и порог текучести τ_0. Изложение основывается на ряде работ авторов, в которых развит метод анализа течений, основанным на сведении задачи о течении в прямоугольном канале к задаче течения в плоском канале. Течение в прямоугольном канале получается в результате суперпозиции течений в двух плоских, скрещенных под прямым углом, каналах [8, 9, 10]. В данной работе изучается влияние поперечной циркуляции на такие характеристики вязкопластического течения как размеры твердого ядра, скорость ядра и расход течения.

Поперечное сечение прямоугольного канала и характеристики ядра течения представлены на рисунке 1, *а*. Течение в прямоугольном канале с движущимися границами считается трехмерным и плоским. Это значит, что все три компоненты скорости – продольная v_z и поперечные v_x и v_y зависят только от поперечных координат – x и y. Уравнения движения вязкопластической жидкости в напряжениях имеют следующий вид:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}; \qquad \gamma_x^{\pm} \equiv \frac{\Gamma_x^{\pm}}{a}; \ \gamma_x^{\pm} \equiv \frac{\Gamma_x^{\pm}}{a} \tag{1}$$

$$\tau_0^2\left(\gamma_{x(y)}^{\pm}\right) = \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2 + 2\tau_{xx}^2 + 2\tau_{zy}^2,$$

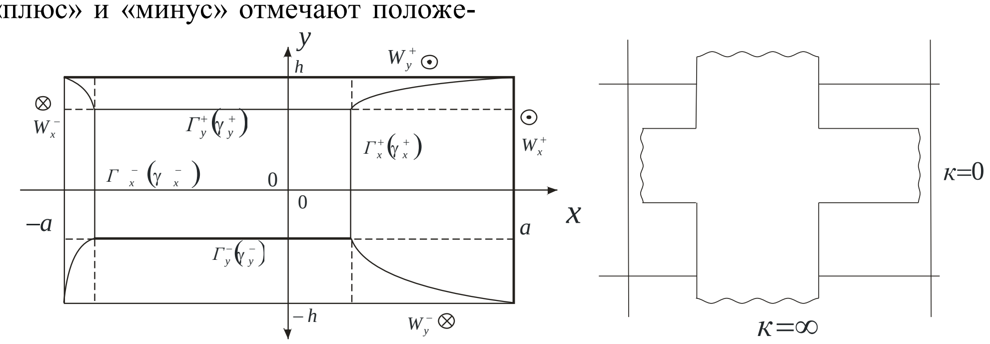
в котором P – давление в канале, $\tau_{ik,i,k}= x,y,z$ – компоненты тензора напряжений; $\gamma_{x(y)}^{\pm}$ - безразмерные компоненты контура границы ядра течения; a и h – ширина и высота прямоугольника в поперечном сечении канала. Уравнения (1) можно последовательно свести к уравнениям течения в плоском канале, который имеет в поперечном сечении полосу, параллельную оси *ox* и полосу, которая в сечении в плоского канала параллельна оси *oy*. Соответственно эти каналы изображены на рис. 1б. Необходимости рассматривать решение задач течения для двух плоских каналов нет. Так как в виду соотношений двойственности между ними, достаточно рассмотреть только одно из двух течений [9, 10]. Без ограничения общности рассматривается течение в плоском канале, границы сечения которого параллельны оси *ox.* В качестве основного используется компонент тензора напряжений τ_{zy}, относительно которого делаются оценки остальных компонентов в тензора напряжений. В соответствии с этим уравнения (1) могут быть переписаны следующим образом:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x}\kappa\rho_y^{\pm}(1 \mp \gamma_y^{\pm}); \ \frac{\tau_{zx}}{\tau_{zy}} = \frac{\partial \upsilon_z/\partial x}{\partial \upsilon_z/\partial y};$$

$$\tau_0^2 = \tau_{zy}^2\left[1 + \left(\frac{\tau_{zx}}{\tau_{zy}}\right)^2 + 2\left(\frac{\tau_{xx}}{\tau_{zy}}\right)^2 + 2\left(\frac{\tau_{xy}}{\tau_{zy}}\right)^2\right]; \tag{2}$$

$$\rho_y^{\pm} = \frac{W_{\|x}^{+} + W_{\|x}^{-} - W_{\|}^{\pm} - \upsilon_k}{W_{\|y}^{\pm} - \upsilon_k},$$

где $W_{\|x}^{+}$, $W_{\|y}^{\pm}$ – граничные продольные скорости (рис. 1, *а*); υ_k – скорость движения твердого ядра; знаки «плюс» и «минус» отмечают положение выше и ниже ядра для величины с индексом *«y»* и правее и левее ядра для величин с индексом *«x»* соответственно.



а *б*

Рис. 1. Модель вязкопластического течения в прямоугольном канале

Из формул (2) следует, что дальнейшего продвижения необходимо исключить все компоненты напряжений, кроме τ_{zy}, а также выразить в первом уравнении производную от τ_{zy} по x через производную по y. Производные по этим переменным связаны соотношением $\partial/\partial x = \kappa\, \partial/\partial y$, где $\kappa = h/a$ [9, 10]. Оценки для компонентов тензора напряжений имеют следующий вид:

$$\frac{\tau_{xx}}{\tau_{zy}} = \kappa\frac{W_{\perp x}^{+} - W_{\perp x}^{-}}{W_{\|y}^{\pm} - \upsilon_k}(1 \mp \gamma_y^{\pm}); \tag{3}$$

$$\frac{\tau_{xy}}{\tau_{zy}} = \frac{W_{\perp y}^{\pm}}{W_{\|y}^{\pm} - \upsilon_k} + \frac{W_{\perp x}^{+} - W_{\perp x}^{-}}{W_{\|y}^{\pm} - \upsilon_k}(1 \mp \gamma_y^{\pm})^2,$$

где $W_{\perp x(y)}^{\pm}$ – поперечные составляющие граничных скоростей на границах прямоугольного канала, параллельных осям *ox* и *oy* соответственно. С помощью соотношений (3) систему уравнений (1) можно записать в виде, отвечающем течению в плоском канале:

$$\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}\left[1+\kappa^{2}\rho_{y}^{\pm}(1\mp\gamma_{y}^{\pm})\right]; \tag{4}$$

$$\tau_{zy}=\pm\frac{\tau_{0}}{\sqrt{1+\kappa^{2}\left[(\rho_{y}^{\pm})^{2}+(\theta_{y}^{\pm})^{2}\right](1\mp\gamma_{y}^{\pm})^{2}+\left[m_{y}^{\pm}+n_{y}^{\pm}\kappa^{2}(1\mp\gamma_{y}^{\pm})^{2}\right]^{2}}},$$

где $\rho_y^{\pm}$ определено формулой (2), равно множителю, сформированному граничными скоростями при оценке отношения τ_{xx}/τ_{zx} в формуле (3), $m_y^{\pm}$ равно первому, а $n_y^{\pm}$ – второму слагаемым, сформированным граничными скоростями для оценки отношения τ_{xy}/τ_{zy} в формуле (3). Система уравнений (4) решена в работах авторов [8, 10]. Там установлено, что скорость твердого ядра υ_k является дробно-рациональной функцией величин $\gamma_y^{\pm}$. Также установлено, что профиль продольной скорости υ_z зависит от поперечной координаты *y* квадратично. В выражения для υ_k и υ_z входят три постоянные, после исключения которых получается система двух нелинейных уравнений для нахождения величин $\gamma_y^{\pm}$. Указанными здесь особенностями обладает чисто продольное течение в прямоугольном канале. Результаты, полученные для чисто продольного течения можно перенести на течение с поперечной циркуляцией, внеся соответствующие изменения в результаты авторов [8]. Поскольку причиной поперечной циркуляции является наличие поперечных составляющих у граничных скоростей, поскольку в случае $W_{\perp x(y)}^{\pm}\equiv 0$ циркуляция отсутствует; и выполняются равенства $\theta_y^{\pm}=0$, $m_y^{\pm}=0$, $n_y^{\pm}=0$. Тогда система уравнений (4) совпадает с изученной ранее [8 – 10]. Было показано, что решение системы уравнений для границ ядра $\gamma_y^{\pm}$ и $\gamma_x^{\pm}$ для течения без поперечной циркуляции представляет собой сумму двух решений для плоских каналов со сторонами в сечениях, параллельными осям *ox* и *oy* соответственно. Таким плоским каналам отвечают предельные значения параметра формы канала $\kappa = 0$ и $\kappa = \infty$. Случай $\kappa = 0$ означает, что $h = const$, $a = \infty$; а случай $\kappa = \infty$ означает, что $h = \infty$, $a = const$. Для течения с поперечной циркуляцией система уравнений для вычисления величин $\gamma_y^{\pm}$ записывается в таком виде:

$$\frac{(1-\gamma_{y}^{+})^{2}}{1+\kappa^{2}\rho_{y}^{+}(1-\gamma_{y}^{+})}-\frac{(1+\gamma_{y}^{-})^{2}}{1+\kappa^{2}\rho_{y}^{-}(1+\gamma_{y}^{-})}=\frac{2\mu(W_{\parallel y}^{+}-W_{\parallel y}^{-})}{h\,dP/d\zeta_{h}},\ \zeta_{h}=z/h, \tag{5}$$

$$\frac{\gamma_{y}^{+}}{1+\kappa^{2}\rho_{y}^{+}(1-\gamma_{y}^{+})}-\frac{\gamma_{y}^{-}}{1+\kappa^{2}\rho_{y}^{-}(1+\gamma_{y}^{-})}=$$

$$=\frac{\tau_{0}}{\sqrt{1+\kappa^{2}\left[(\rho_{y}^{+})^{2}+(\theta_{y}^{+})^{2}\right](1-\gamma_{y}^{+})^{2}+\left[m_{y}^{+}+\kappa^{2}n_{y}^{+}(1-\gamma_{y}^{+})^{2}\right]^{2}}}+$$

$$+\frac{\tau_{0}}{\sqrt{1+\kappa^{2}\left[(\rho_{y}^{-})^{2}+(\theta_{y}^{-})^{2}\right](1+\gamma_{y}^{-})^{2}+\left[m_{y}^{-}+\kappa^{2}n_{y}^{-}(1+\gamma_{y}^{-})^{2}\right]^{2}}}.$$

Если систему уравнений (5) рассмотреть для случая $\kappa = 0$, то это равносильно системе уравнений для плоского канала. Это означает, что уравнения (5) при $\kappa = 0$ являются следствием следующей системы уравнений, которая после исключения постоянных c_1, $c_2^{\pm}$ превращаются в уравнения (5) при $\kappa = 0$:

$$\upsilon_{z}^{\pm}=\frac{h}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial\zeta_{h}}\xi_{y}^{2}+\frac{(c_{1}\mp\tau_{0y})}{\mu}h\xi+c_{2}^{\pm};$$

$$\frac{h}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial\zeta_{h}}(\gamma_{y}^{+})^{2}+\frac{c_{1}-\tau_{0y}^{+}}{\mu}h\gamma_{y}^{+}+c_{2}^{+}=\frac{h}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial\zeta_{h}}(\gamma_{y}^{-})^{2}+\frac{c_{1}-\tau_{0y}^{-}}{\mu}h\gamma_{y}^{-}+c_{2}^{-}; \tag{6}$$

$$\gamma_{y}^{+}\frac{\partial P}{\partial\zeta_{h}}+c_{1}=\tau_{0y}^{+};\ \gamma_{y}^{-}\frac{\partial P}{\partial\zeta_{h}}+c_{1}=\tau_{0y}^{-};$$

$$\frac{h}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial \zeta_h}+\frac{c_1-\tau_{0y}^{+}}{\mu}h+c_2^{+}=W_{\parallel y}^{+}\,;\;\frac{h}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial \zeta_h}-\frac{c_1+\tau_{0y}^{-}}{\mu}h+c_2^{-}=W_{\parallel y}^{-}\,;$$

$$\tau_{0y}^{\pm}=\frac{\tau_0}{\sqrt{1+(m_y^{\pm})^2}}\,;\; m_y^{\pm}=\frac{W_{\perp y}^{\pm}}{W_{\parallel y}^{\pm}-\upsilon_k}.$$

После проведения ряда преобразований, которые ввиду громоздкости и простоты не приводятся для решений уравнений (6) можно прийти к таким выражениям:

$$\gamma_y^{\pm}(\kappa=0)=\pm\frac{\tau_{0y}^{+}+\tau_{0y}^{-}}{2dP/d\zeta_h}+\frac{\mu(W_{\parallel y}^{+}-W_{\parallel y}^{-})}{2h\,dP/d\zeta_h\left(1-\dfrac{\tau_{0y}^{+}+\tau_{0y}^{-}}{2dP/d\zeta_h}\right)}. \qquad (7)$$

Если поперечная циркуляция отсутствует, то $\tau_0^{+}=\tau_0^{-}$, поскольку $m_y^{\pm}$ обращаются в ноль. Используя двойственный характер величин, характеризующих течения в плоских взаимно перпендикулярных каналах с шириной h и a, исходя из формулы (7) можно сразу записать выражения для величин $\gamma_x^{\pm}$ для κ = ∞:

$$\gamma_x^{\pm}(\kappa=\infty)=\pm\frac{\tau_{0x}^{+}+\tau_{0x}^{-}}{2dP/d\zeta_a}+\frac{\mu(W_{\parallel x}^{+}-W_{\parallel x}^{-})}{2a\,dP/d\zeta_a\left(1-\dfrac{\tau_{0x}^{+}+\tau_{0x}^{-}}{2dP/d\zeta_a}\right)},\;\zeta_a=\frac{z}{a}. \qquad (8)$$

Формулы (7) и (8) дают решение системы уравнений (5) для величин $\gamma_y^{\pm}$ при κ =0 и аналогичной системы уравнений для величин $\gamma_x^{\pm}$, которая отличается от (5) переменной всех индексов *«y»* на индексы *«x»* и заменой *κ→1/κ*; и которая в силу этого и избегания повторений не записывалась.

Далее необходимо решить систему уравнений (5) для другого предельного случая: *κ = ∞,* после чего, используя соображения двойственности, записать выражения для $\gamma_x^{\pm}(\kappa=0)$. Система уравнений (5) в пределе *κ = ∞:* принимает следующий вид:

$$\begin{cases}\dfrac{1-\gamma_y^{+}}{\rho_y^{+}}-\dfrac{1+\gamma_y^{-}}{\rho_y^{-}}=\dfrac{2\mu}{a}\dfrac{W_{\parallel y}^{+}-W_{\parallel y}^{-}}{dP/d\zeta_a},\\[2ex] \dfrac{\gamma_y^{+}}{\rho_y^{+}(1-\gamma_y^{+})}-\dfrac{\gamma_y^{-}}{\rho_y^{-}(1+\gamma_y^{-})}=0.\end{cases} \qquad (9)$$

Можно показать, что система уравнений (9) равносильна одному квадратному уравнению относительно $\gamma_y^{\pm}$. Опуская длинные и громоздкие преобразования результат системы уравнений (9) может быть записан в таком виде:

$$\frac{1\mp\gamma_y^{\pm}}{\rho_y^{\pm}}=-\frac{1}{2}\left[\pm\tau_{wy}-\frac{(\rho_y^{+})^2+(\rho_y^{-})^2}{\rho_y^{+}\rho_y^{-}(\rho_y^{+}+\rho_y^{-})}\right]+\sqrt{\left[\pm\tau_{wy}-\frac{(\rho_y^{+})^2+(\rho_y^{-})^2}{\rho_y^{+}\rho_y^{-}(\rho_y^{+}+\rho_y^{-})}\right]^2+\tau_{wy}\frac{\rho_y^{+}}{\rho_y^{-}(\rho_y^{+}+\rho_y^{-})}} \qquad (10)$$

$$\tau_{wy}\equiv\frac{2\mu}{a}\frac{W_{\parallel y}^{+}-W_{\parallel y}^{-}}{dP/d\zeta_a}.$$

Особенностью решения (10) является тот факт, что зависимость этого решения от поперечных характеристик течения, которые сконцентрированы в величинах $m_y^{\pm}$ и $n_y^{\pm}$ отсутствует. Иначе говоря, величины $\gamma_y^{\pm}(\kappa=0)$ зависят от поперечных граничных скоростей, а величины $\gamma_y^{\pm}(\kappa=0)$ не зависят. Общая же (не для этого предельного случая) зависимость $\gamma_y^{\pm}$ от $m_y^{\pm}$ и $n_y^{\pm}$ присутствует. В этом можно убедиться, если систему уравнений (5) разложить в ряд по параметру *1/κ* вблизи точки *κ = ∞ (1/κ = 0).* В первом и последующих слагаемых такая зависимость присутствует.

В силу уже упомянутого свойства двойственности между $\gamma_y^{\pm}(\kappa)$ и $\gamma_x^{\pm}(1/\kappa)$ сразу можно записать выражение для величин $\gamma_x^{\pm}(\kappa=0)$. Для этого необходимо в формуле (10) во всех величинах с индексом *«y»* заменить его на индекс *«x»;* в величине τ_{wx} (которая заменяет τ_{wy}) необходимо заменить множитель *1/a* на множитель *1/h*; в производной давления надо заменить переменную ζ_a на переменную ζ_h. С учетом сказанного теперь можно построить выражения для $\gamma_y^{\pm}(\kappa)$ и $\gamma_x^{\pm}(\kappa)$ во всем диапазоне изменения этого параметра, опираясь на выражения (7), (8), (10) и его аналог для $\gamma_x^{\pm}(\kappa=0)$. Принимая во внимание, что уравнения (5) и их аналог для $\gamma_x^{\pm}$ содержит зависимость только от κ^2, следует заключить, что точное решение для уравнений (5) и их аналогов для $\gamma_x^{\pm}$ зависят только от κ^2. Поэтому любая интерполирующая формула, базирующаяся на предельных своих значениях (7), (10) должна состоять из множителей, зависящих только от κ^2. Простейшая из соответствующих интерполяций имеет такой вид:

$$\gamma_y^{\pm}(\kappa)=\gamma_y^{\pm}(\kappa=0,W_{\parallel y}^{\pm},W_{\parallel x}^{\pm},W_{\perp y}^{\pm})\frac{1}{1+\kappa^2}+\gamma_y^{\pm}(\kappa=\infty,W_{\parallel y}^{\pm},W_{\parallel x}^{\pm})\frac{\kappa^2}{1+\kappa^2}; \tag{11}$$

$$\gamma_x^{\pm}(\kappa)=\gamma_x^{\pm}(\kappa=0,W_{\parallel x}^{\pm},W_{\parallel y}^{\pm})\frac{1}{1+\kappa^2}+\gamma_x^{\pm}(\kappa=\infty,W_{\parallel x}^{\pm},W_{\parallel y}^{\pm},W_{\perp x}^{\pm})\frac{\kappa^2}{1+\kappa^2}.$$

Для вычисления скорости твердого ядра и расхода течения формул (7), (8), (10) и ее аналога для $\gamma_x^{\pm}(\kappa=0)$ и (11) достаточно. Для вычисления плотности энергии диссипации к этому необходимо добавить формулы для поперечных (циркуляционных) течений. Скорость продольного течения в областях, расположенных между границами твердого ядра $\gamma_y^{\pm}$, и границами прямоугольного канала $y=\pm h$ находятся в результате решения первого уравнения — уравнение течения в формулах (2). Это уравнение относительно продольной скорости υ_z является уравнением второго порядка по единственной переменной y. Градиент давлений при этом есть величина постоянная. Если использовать безразмерную переменную $\xi_h=y/h$, то профиль скорости υ_z представляет собой квадратный трехчлен. Скорость продольного течения υ_z для областей, расположенных между границами твердого ядра $\gamma_x^{\pm}$ и границами прямоугольника с координатами $x=\pm a$ так же является квадратным трехчленом, зависящим от переменной $\xi_a=x/a$. Границы между областями с зависимостью продольной скорости от переменной ξ_h и ξ_a представляют собой кривые, проходящие через вершины прямоугольника ядра и прямоугольника в поперечном сечении канала. Уравнения эти кривых даны в работе авторов [10]. Процедура вычисления расхода сводится к вычислению расходов в каждой из четырех областей, изображенных на рис. 1а. Все эти области одного типа – трапеции с криволинейными боковыми сторонами. Общий расход в канале равен сумме расходов в областях, указанных выше и расхода твердого ядра. Последний равен произведению площади ядра на его скорость. Как показано авторами, расход продольного течения без поперечной циркуляции представляет собой дробно-рациональное выражение, включающее величины $\gamma_x^{\pm}$ и $\gamma_y^{\pm}$ в степенях с первой по четвертую. Величина расхода течения с поперечной циркуляцией имеет вид, совпадающий с видом течения без циркуляции. Все отличия сосредоточены в величинах $\gamma_x^{\pm}$ и $\gamma_y^{\pm}$, которые, в соответствии с (11) содержит в качестве независимых аргументов поперечные граничные скорости $W_{\perp x}^{\pm}$, $W_{\perp y}^{\pm}$.

Скорость продольного течения с поперечной циркуляцией можно записать в таком виде:

$$\upsilon_z^{\pm}=-\frac{h}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial\zeta_h}\frac{1-\xi_y^2}{1+\kappa^2\rho_y^{\pm}(1\mp\gamma_y^{\pm})}\pm\frac{h}{\mu}\frac{\partial P}{\partial\zeta_h}\frac{\gamma_y^{\pm}(1\mp\xi_y)}{1+\kappa^2\rho_y^{\pm}(1\mp\gamma_y^{\pm})}+W_{\parallel y}^{\pm},\ +\!:\ \gamma_y^{+}\le\xi_x\le 1,$$

$$-\!:\ -1\le\xi_y\le\gamma_y^{-}, \tag{12}$$

$$\upsilon_z^{\pm}=-\frac{a}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial\zeta_a}\frac{1-\xi_x^2}{1+(1/\kappa^2)\rho_x^{\pm}(1\mp\gamma_x^{\pm})}\pm\frac{a}{\mu}\frac{\partial P}{\partial\zeta_a}\frac{\gamma_x^{\pm}(1\mp\gamma_x^{\pm})}{1+\kappa^2\rho_x^{\pm}(1\mp\gamma_x^{\pm})}+W_{\parallel x}^{\pm},\ +\!:\ \gamma_x^{+}\le\xi_x\le 1,$$

$$-\!:\ -1\le\xi_x\le\gamma_x^{-},$$

$$\xi_y=\frac{y}{h};\ \xi_x=\frac{x}{a};\ \xi_h=\frac{z}{h};\ \xi_a=\frac{z}{a}.$$

Скорости υ_x и υ_y поперечного течения в прямоугольном канале следует искать тоже в виде квадратного выражения от переменных ξ_x и ξ_y. При этом соответствующие поперечные градиенты являются искомыми величинами, в отличие от продольного градиента давления $\partial P/\partial z$, которые является независимой величиной и задается постоянным. Для нахождения поперечных скоростей и градиентов давлений следует записать уравнения поперечного течения для тех же областей что и для продольного течения. Эти уравнения имеют такой вид:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z},\ \tau_0^2=\tau_{zx}^2+\tau_{zy}^2+2\tau_{xx}^2+2\tau_{xy}^2 \quad (13)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}.$$

Для определенности рассматриваются сначала поперечные течения для областей, задаваемых неравенствами $\gamma_y^+\le\xi_x\le 1,\ -1\le\xi_y\le\gamma_y^-$. В этом случае независимой переменной для скорости течения $\upsilon_x^\pm$ будет ξ_y, а давление будет зависеть от переменной ξ_x. Непосредственно из рис. 1, *а* усматривается, что отношения компонентов τ_{xx}/τ_{xy}, τ_{xz}/τ_{xy} равно:

$$\frac{\tau_{xx}}{\tau_{xy}}=\frac{\partial\upsilon_x^\pm/\partial x}{\partial\upsilon_x^\pm/\partial y+\partial\upsilon_x^\pm/\partial x}=\frac{\kappa(W_{\perp x}^+-W_{\perp x}^-)(1\mp\gamma_y^\pm)}{W_{\perp y}^++\kappa^2(W_{\perp x}^+-W_{\perp x}^-)(1\mp\gamma_y^\pm)^2}\equiv\kappa\,\rho_{yx}^\pm(1\mp\gamma_y^\pm); \quad (14)$$

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_{xy}}=\frac{\partial\upsilon_z^\pm/\partial x}{\partial\upsilon_x^\pm/\partial y+\partial\upsilon_y^\pm/\partial x}=\frac{\kappa(W_{\parallel x}^+-W_{\parallel x}^-)(1\mp\gamma_y^\pm)}{W_{\perp y}^++\kappa^2(W_{\perp x}^+-W_{\perp x}^-)(1\mp\gamma_y^\pm)^2}\equiv\kappa\,\rho_{zy}^\pm(1\mp\gamma_y^\pm).$$

Если в первое из уравнений (13) подставить значения τ_{xx} и τ_{xz}, выраженные через τ_{xy} в соответствии в (14), то получится уравнение в частных производных связывающее $\partial P/\partial x$ и частные производные от τ_{xy}. Используя оценки $\partial/\partial x\approx\kappa\partial/\partial y;\ \partial/\partial z\sim\kappa_{zh}\partial/\partial y$, где $\kappa_{zh}=h/L$ для величины τ_{xy} получается следующее уравнение:

$$\frac{\partial P_y^\pm}{\partial\zeta_a}=\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial\xi_h}\left[1+\kappa^2\rho_{yx}^\pm(1\mp\gamma_y^\pm)+\kappa\kappa_{zh}\,\rho_{zy}^\pm(1\mp\gamma_y^\pm)\right], \quad (15)$$

где $P_y^\pm$ – давление в областях выше ядра течения.

Для областей, задаваемых неравенствами $\gamma_x^+\le\xi_x\le 1$ и $-1\le\xi_x\le\gamma_x^-$ следует рассматривать второе уравнение движения (13). В этом случае независимой переменной для скорости $\upsilon_y^\pm$ будет ξ_x, а давление будет зависеть от независимой переменной ξ_y. Из приведенных здесь рассуждений следует, что компоненты напряжений τ_{yy} и τ_{yz} следует выразить через компоненту τ_{yx}. Это легко сделать так, как $\tau_{yy}=-\tau_{xx}$ в силу уравнения сохранения потока, а отношение τ_{yx}/τ_{yx} вычисляется так же, как и во второй формуле (14). Можно найти соответствующие отношения без вычисления с помощью отношений двойственности. Для этого надо в формулах (14) заменить индекс *«у»* на индекс *«х»* и наоборот, а величину к на $1/\kappa^2$, и ввести соответственно для отношения τ_{yy}/τ_{yx} обозначение $(1/\kappa)\,\rho_{xy}^\pm(1\mp\gamma_x^\pm)$, и для отношения τ_{yz}/τ_{yx} обозначение $(1/\kappa)\,\rho_{zx}^\pm(1\mp\gamma_x^\pm)$.

Возвращаясь к уравнению (15), его следует решить с граничными условиями, отличными от граничных условий для продольной скорости υ_z. Поперечные скорости должны на границах прямоугольники в сечении канала быть равными поперечным скоростям границ. На поверхности твердого ядра поперечные скорости должны обращаться в ноль. Из формулы (15) для давлений $P_y^\pm$ и давлений $P_x^\pm$ для областей левее и правее ядра следует, что $P_y^\pm=P_y^\pm(\zeta_a)$, $P_x^\pm=P_x^\pm(\xi_h)$. Переменные ζ_a и ξ_h изменяются в таких пределах: $\gamma_x^+\le\xi_h\le 1;\ -1\le\xi_h\le\gamma_x^-;\ \gamma_x^+\le\zeta_a\le 1;$ $-1\le\zeta_a\le\gamma_x^-$. Следовательно, скорости поперечного течения должны зависеть от величин $dP_y^\pm/d\zeta_a$ и $dP_x^\pm/d\xi_h$ как от параметров, которые следует найти. Для отыскания неизвестных поперечных градиентов давлений следует воспользоваться такими вспомогательными представлениями. Течение между твердым ядром и границами канала в поперечной плоскости можно представить себе как течение в четырех последовательно соединенных каналах различной ширины и длины с движущимися и неподвижными границами. В каждом из этих каналов реализуются суммарное течение, состоящее из волокущего течения и напорного течения. Волокущее течение вызвало движением соответствующей границы, а напорное – перепадов поперечного давления. Четыре упомянутых канала образуют замкнутый канал. Это означает, что разность давлений по контуру четырех каналов должна обращаться в ноль. Поскольку поперечные каналы соединены в замкнутый контур последовательно, постольку расходы поперечных течений в каждом канале равны между собой. Условие одинаковости всех расходов дает три условия на неизвестные величины градиентов давления. Еще одно условие, получается, из-за равенства нулю перепада давлений вдоль замкнутого контура каналов. Дополнительным неизвестным параметром является давление в начальной точке замкнутого контура (она же конечная его точка). Выбор начальной точки произволен. Он не сказывается на результатах. Ниже в качестве начальной точки для давления используется точка с координатами $\zeta_a=1$ и $\xi_h=1$. Для определения давления в этой точке следует использовать следующее условие: среднее значение давления в поперечном сечении прямоугольного канала должно быть равным значению продольного давления в этом сечении. Продольное давление является линейной функцией продольной координаты z и краевых условий на торцах канала. Продольное давление задается независимо через указание величин давлений P_h и P_k. Из сказанного следует, что поперечное давление является функцией продольной координаты z, величин $P_h(z=0)$ и $P_k(z=L)$ и значений поперечных скоростей границ $W_{\perp y}^{\pm}$, $W_{\perp x}^{\pm}$. Другая группа параметров, определяющих поведение поперечного давления, связана с характеристиками продольного течения. Эти характеристики следующие: $\gamma_y^{\pm}$, $\gamma_x^{\pm}$, $\rho_{yx}^{\pm}$, $\rho_{zy}^{\pm}$, которые, в свою очередь, зависят от μ, τ_0, $W_{\parallel y}^{\pm}$, $W_{\parallel x}^{\pm}$. Таким образом, поперечное давление зависит от всех граничных скоростей и координат границ твердого ядра и параметра формы κ. После этих замечаний можно приступить к выводу уравнений для поперечного давления и расхода. Все сказанное выше изображено на рис. 2.

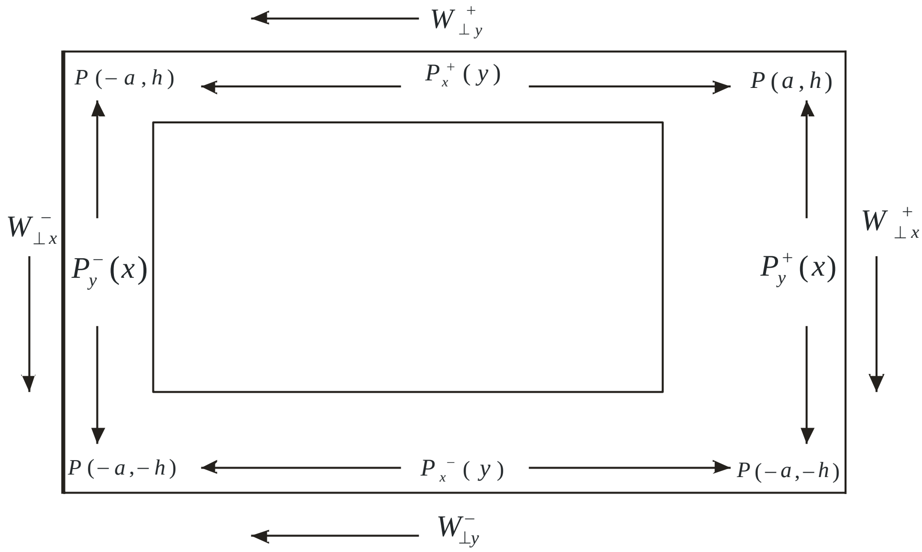


Рис. 2. Характеристики ядра течения

Решение уравнений (15) для $\upsilon_x^{\pm}(\xi_h)$ и его аналога для $\upsilon_y^{\pm}(\xi_a)$ в указанных выше пределах с обсужденными выше граничными условиями получается после ряда громоздких преобразований и двукратного интегрирования по поперечной переменной ξ_h для $\upsilon_x^{\pm}$ и ζ_a для $\upsilon_y^{\pm}$. Результат имеет следующий вид:

$$\upsilon_x^{\pm}(\xi_h)=\frac{h}{2\mu}\frac{1}{1+\kappa^2 R^{\pm}(1\mp\gamma_y^{\pm})}\frac{\partial P_y^{\pm}}{\partial\zeta_a}\left[\xi_h^2-\gamma_y^{\pm2}\pm(1\pm\gamma_y^{\pm})(\gamma_y^{\pm}-\xi_h)\right]\pm\frac{W_{\perp y}^{\pm}(\xi_h-\gamma_y^{\pm})}{(1\mp\gamma_y^{\pm})};$$

$$\upsilon_y^{\pm}(\zeta_a)=\frac{a}{2\mu}\frac{1}{1+\dfrac{1}{\kappa^2}S^{\pm}(1\mp\gamma_x^{\pm})}\frac{\partial P_x^{\pm}}{\partial\zeta_h}\left[\zeta_a^2-\gamma_x^{\pm2}\pm(1\pm\gamma_x^{\pm})(\gamma_x^{\pm}-\zeta_a)\right]\pm\frac{W_{\perp x}^{\pm}(\xi_x-\gamma_x^{\pm})}{(1\mp\gamma_x^{\pm})}; \quad (16)$$

$$R^{\pm}=\rho_{yx}^{\pm}+\frac{\kappa_{zh}}{\kappa}\rho_{zy}^{\pm};\ S^{\pm}=\rho_{xy}^{\pm}+\frac{\kappa}{\kappa_{za}}\rho_{xz}^{\pm};$$

$$\kappa_{zh}=\frac{h}{L};\ \kappa_{za}=\frac{a}{L}.$$

Вычисление расхода течения в каждом канале происходит интегрированием скорости $\upsilon_x^{\pm}(\xi_h)$ в промежутках (γ_y^{+}, 1) и (-1, γ_y^{-}); и скорости $\upsilon_x^{\pm}(\zeta_a)$ в промежутках (γ_x^{+}, 1) и (-1, γ_x^{-}). Результаты интегрирования записываются таким образом:

$$\dot{V}_y^+ = h\int_{\gamma_y^+}^{1} \upsilon_x^+ d\xi_h = \frac{h^2}{2\mu}\frac{1}{1+\kappa^2 R^+(1-\gamma_y^+)}\frac{\partial P_y^+}{\partial \zeta_a}\left[\frac{1-3\gamma_y^{+2}+2\gamma_y^{+3}}{3} - \frac{(1+\gamma_y^+)(1-\gamma_y^+)^2}{2}\right] + \frac{W_{\perp y}^+ h}{2}(1+\gamma_y^+)\,;$$

$$\dot{V}_y^- = h\int_{-1}^{\gamma_y^-} \upsilon_x^- d\xi_h = \frac{h^2}{2\mu}\frac{1}{1+\kappa^2 R^-(1+\gamma_y^-)}\frac{\partial P_y^-}{\partial \zeta_a}\left[\frac{1-3\gamma_y^{-2}-2\gamma_y^{-3}}{3} - \frac{(1-\gamma_y^-)(1+\gamma_y^-)^2}{2}\right] + \frac{W_{\perp y}^- h}{2}(1+\gamma_y^-)\,;$$

(17)

$$\dot{V}_x^+ = a\int_{\gamma_x^+}^{1} \upsilon_y^+ d\zeta_a = \frac{a^2}{2\mu}\frac{1}{1+\frac{1}{\kappa^2}S^+(1-\gamma_x^+)}\frac{\partial P^+}{\partial \xi_h}\left[\frac{1-3\gamma_x^{+2}+2\gamma_x^{+3}}{3} - \frac{(1+\gamma_x^+)(1-\gamma_x^+)^2}{2}\right] + \frac{W_{\perp x}^+ h}{2}(1+\gamma_x^+)\,;$$

$$\dot{V}_x^- = a\int_{-1}^{\gamma_x^-} \upsilon_y^- d\zeta_a = \frac{a^2}{2\mu}\frac{1}{1+\frac{1}{\kappa^2}S^-(1+\gamma_x^-)}\frac{\partial P^-}{\partial \xi_h}\left[\frac{1-3\gamma_x^{-2}-2\gamma_x^{-3}}{3} - \frac{(1-\gamma_x^-)(1+\gamma_x^-)^2}{2}\right] + \frac{W_{\perp x}^- a}{2}(1+\gamma_x^-)\,.$$

Тот факт, что каналы поперечной циркуляции образуют замкнутый контур, а само поперечное давление должно быть непрерывным на стыках каналов, приводит к таким соотношениям между значениями давлений: $P_y^+(-a) = P_x^-(+h)$, $P_x^-(-h) = P_y^-(-a)$, $P_y^-(+a) = P_x^+(-h)$, $P_x^+(+h) = P_y^+(+a)$. Из уравнения (15) и его аналога для $\upsilon_y^\pm(\zeta_a)$ следует, что зависимость давлений от соответствующих координат вдоль поперечных каналов имеет следующий вид:

$$P_y^+ = P_0 + \frac{\partial P_y^+}{\partial \zeta_a}(\zeta_a - 1)\,;$$

$$P_x^- = P_0 - 2\frac{\partial P_y^+}{\partial \zeta_a} + \frac{\partial P_x^-}{\partial \xi_h}(\xi_h - 1)\,;$$

$$P_y^- = P_0 - 2\frac{\partial P_y^+}{\partial \zeta_a} - 2\frac{\partial P_x^-}{\partial \xi_h} + \frac{\partial P_y^-}{\partial \zeta_a}(\zeta_a + 1)\,;$$

$$P_x^+ = P_0 - 2\frac{\partial P_y^+}{\partial \zeta_a} - 2\frac{\partial P_x^-}{\partial \xi_h} + 2\frac{\partial P_y^-}{\partial \zeta_a} + \frac{\partial P_x^+}{\partial \xi_h}(\xi_h + 1)\,,$$

где P_0 – давление в точке начала отсчета с координатами *(x=a, y=h).*

Среднее значение поперечного давления по замкнутому контуру, охватывающего твердое ядро определяется как сумма интегралов по переменным ξ_h и ζ_a в соответствующих пределах. При интегрировании слагаемые с ξ_h и ζ_a дают нулевой вклад. Поэтому среднее значение поперечного давления оказывается таким:

$$2P_0 - \frac{3+4\kappa}{1+\kappa}\frac{\partial P_y^+}{\partial \zeta_a} + \frac{1+2\kappa}{1+\kappa}\frac{\partial P_y^-}{\partial \zeta_a} - \frac{1+3\kappa}{1+\kappa}\frac{\partial P_x^-}{\partial \xi_h} + \frac{\kappa}{1+\kappa}\frac{\partial P_x^+}{\partial \xi_h} = P_\parallel(z)\,, \qquad (19)$$

$$P_\parallel(z) = \frac{P_K - P_H}{L}Z + P_H\,.$$

Условия равенства нулю перепада давления вдоль замкнутого контура накладывает следующее ограничение на градиенты поперечных давлений:

$$-\frac{\partial P_y^+}{\partial \zeta_a} + \frac{\partial P_y^-}{\partial \zeta_a} - \frac{\partial P_x^-}{\partial \xi_h} + \frac{\partial P_x^+}{\partial \xi_h} = 0\,. \qquad (20)$$

Совокупность уравнений (19), (20), а также трех уравнений, которые получаются приравниванием выражений для расходов, задаваемых формулами (17) составляют систему пяти линейных уравнений для определения пяти неизвестных: $\partial P_x^\pm/\partial\zeta_a$, $\partial P_x^\pm/\partial\xi_h$ и P_0. Решая эти уравнения и подставив результаты в формулы (16) можно получить замкнутые выражения для скоростей поперечной циркуляции. Имея скорости $\upsilon_x^\pm(\xi_h)$ и $\upsilon_y^\pm(\zeta_a)$ можно вычислить энергию диссипации вязкопластического течения в прямоугольном канале с учетом поперечной циркуляции. Процедура вычисления основана на то, что в каждой из четырех областей, на которые разбит прямоугольник в сечении канала, имеется течение, которое имеет продольную и поперечную составляющие. Для областей выше и ниже ядра – это $\upsilon_z^\pm(\xi_h)$ и $\upsilon_x^\pm(\xi_h)$; для областей левее и правее ядра – это $\upsilon_z^\pm(\zeta_a)$ и $\upsilon_y^\pm(\zeta_a)$. Следует также учесть, что в силу уравнения (19) кажется, что возникает дополнительная зависимость величин $\upsilon_x^\pm$ и $\upsilon_y^\pm$ от продольной координаты z. Поэтому величина энергии диссипации $\dot{e}$, приходящаяся на поперечное сечение прямоугольного канала должна включать слагаемые, которые содержат от $(\partial\upsilon_x^{\pm}/\partial z)^2$ и $(\partial\upsilon_y^{\pm}/\partial z)^2$. На самом деле такой зависимости нет. Уравнения для расходов включают только градиенты давлений по поперечным координатам так, что условия постоянства расхода и нулевое изменение давления вдоль замкнутого контура составляют четыре независимых уравнения для четырех градиентов. Поэтому, хотя величина давления в канале зависит от всех координат x, y, z, кинематические величины зависят только от координат x и y. Учитывая эти соображения величину $\dot{e}$ можно представить в виде такой суммы:

$$\frac{\dot{e}}{2\mu}=\int\limits_{\Gamma_y^+}^{h}\left(\frac{\partial\upsilon_z^+}{\partial y}\right)^2 dy\cdot 2a+\int\limits_{-h}^{\Gamma_y^-}\left(\frac{\partial\upsilon_z^-}{\partial y}\right)^2 dy\cdot 2a+\int\limits_{\Gamma_x^+}^{a}\left(\frac{\partial\upsilon_z^+}{\partial x}\right)^2 dx\cdot 2h+\int\limits_{-a}^{\Gamma_x^-}\left(\frac{\partial\upsilon_z^-}{\partial y}\right)^2 dx\cdot 2h+$$
$$+\int\limits_{\Gamma_y^+}^{h}\left(\frac{\partial\upsilon_x^+}{\partial y}\right)^2 dy\cdot 2a+\int\limits_{-h}^{\Gamma_y^-}\left(\frac{\partial\upsilon_x^-}{\partial y}\right)^2 dy\cdot 2a+\int\limits_{\Gamma_x^+}^{a}\left(\frac{\partial\upsilon_y^+}{\partial x}\right)^2 dx\cdot 2h+\int\limits_{-a}^{\Gamma_x^-}\left(\frac{\partial\upsilon_y^-}{\partial y}\right)^2 dx\cdot 2h. \quad (21)$$

Величина продольного расхода течения вычисляется для каждой из областей отдельно и так же суммируется. В результате для расхода $\dot{V}_z$ получается следующее выражение:

$$\dot{V}_z=\int\limits_{\Gamma_y^+}^{h}\upsilon_{zy}^+dy\cdot 2a+\int\limits_{-h}^{\Gamma_y^-}\upsilon_{zy}^-dy\cdot 2a+\int\limits_{\Gamma_x^+}^{a}\upsilon_{zx}^+dx\cdot 2h+\int\limits_{-a}^{\Gamma_x^-}\upsilon_{zx}^-dx\cdot 2h, \quad (22)$$

где υ_{zy}^{+} даются формулами (8), а $\upsilon_{zx}^{\pm}$ – их аналогами на основании принципа двойственности.

Резюмируя смысл полученных результатов, можно сделать вывод о том, что модель трехмерного течения бингамовской жидкости в канале прямоугольного поперечного сечения была построена с использованием двух основных приемов. Первый из них, состоит в разбиении прямоугольника на твердое ядро и четыре прямоугольные области. Второй прием состоит в том, что вязкое течение в каждой из областей является двухмерным – продольным и поперечным, но и то и другое течения зависят только от одной координаты. Это означает, что такие течения эквивалентны течениям с поперечной циркуляцией в плоском канале. Следует отметить и дополнительный прием, вытекающий из первых двух, который заключается в том, что ядро течения бингамовской жидкости имеет в сечении прямоугольник, а это, безусловно, следует считать некоторым приближением к реальной ситуации. Такой подход оправдывает себя тем, что позволяет в явном аналитическом виде вычислить все основные характеристики сложного трехмерного течения и проанализировать зависимость от граничных условий. При этом следует отметить, что учтены все восемь продольных и поперечных граничных условий с любым возможным их распределением на границах канала.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ясногородский А.Я., Звездин А.Г.* Многоцелевые двухшнековые машины для перерабатывающих технологий. – Х.: 2006. – 184 с.
2. *Бернхард Э.* Переработка пластических масс. – М.: Химия. 1965. – 746 с.
3. Прессы пищевых и кормовых производств. – под ред. А.Я. Соколова. – М.: Машиностр. 1973. – 232 с.
4. *Герман Х.* Шнековые машины в технологии. – Л.: Химия. 1975. – 229 с.
5. *Тадмор З., Гогос К.* Теоретические основы переработки полимеров. – М.: Химия. 1984. – 628 с.
6. *Райнер М.* Реология. – М.: Наука. ГРФМЛ. 1965. – 223 с.
7. *Мачихин Ю.А., Мачихин С.А.* Инженерная реология пищевых материалов. – М.: 1981.
8. Модель в'язкопластичного бінгамовської течії в прямокутному каналі / Е.В.Білецький, Ю.А. Толчинський // Обладнання та технології харчових виробництв – 2010. – № 1 (10) – С.122-125.
9. Течія в’язкопластичної рідини в пласкому каналі / Е.В.Білецький, Ю.А. Толчинський // Наукові праці ОНАХТ. – 2010. - №37 – С. 122-126
10. Модель вязкопластического течения в прямоугольном канале / Е.В.Білецький, Ю.А. Толчинський // Обладнання та технології харчових виробництв. – 2011. – 3-16 С.