ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И УПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ

Медведева О. А., канд. физ.-мат. наук, преп.,
Медведев С. Н., канд. физ.-мат. наук, преп.,
Воронежский государственный университет

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДВОЙСТВЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

romashka16.12@mail.ru

В статье предложена модель задачи о назначениях с запретами на одновременный выбор из каждой группы более одного элемента, отличительной особенностью которой является наличие дополнительных линейных ограничений специального вида. Кроме того, предложен учитывающий специфику запретов приближённый метод решения, в основе которого лежит переход к двойственной задаче с последующим использованием метода Удзавы. Для решения поставленной задачи разработан программный комплекс, реализующий предложенные в статье алгоритмы. На его основе проведён вычислительный эксперимент, результаты которого также отражены в данной работе.

Ключевые слова: *дискретная оптимизация, задача о назначениях, двойственная задача, алгоритм решения, метод Удзавы, вычислительный эксперимент.*

Введение. Задачей о назначениях является хорошо изученной и для неё разработаны многочисленные алгоритмы решения, самый известный из которых – венгерский метод [1]. Однако дополнительные требования, обусловленные практическими задачами, приводят к различным модификациям математической модели, связанным в частности с изменением стандартных или добавлением новых ограничений [2]. Для модифицированных моделей известные методы зачастую оказываются не применимы, что требует разработки специальных подходов к нахождению точного или приближённого решения, чему и посвящена данная работа. Основные исследования задачи о назначениях связаны с изучением различных целевых функций при стандартных ограничениях [1, 2, 3] или с применением линейной свёртки критериев [4, 5].

Постановка задачи. Рассматривается задача распределения работ между претендентами, в которой присутствует дополнительное требование: предусмотрен запрет на одновременное выполнение определённых видов работ претендентами, конфликтующими друг с другом.

Пусть имеются m претендентов на n рабочих мест, причём $m > n$ (что соответствует наличию конкуренции). Известна стоимость c_{ij} затрат, связанных с назначением i-го претендента на j-е место. Кроме того, известны группы P_1, $P_2, \ldots, P_K$ пар индексов (i, j), где индекс i соответствует претендентам, конфликтующим друг с другом, а индекс j – работам, на которые соответствующих претендентов нельзя брать одновременно. Требуется распределить претендентов по рабочим местам так, чтобы каждый принятый претендент занял одно место, каждое место было занято одним претендентом и, кроме того, назначенные претенденты не конфликтовали друг с другом. Связанные с этим распределением затраты должны быть минимальными.

Для формализации математической модели вводятся переменные

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й претендент назначен на } j\text{-е место,} \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}.$$

Математическая модель задачи примет вид

$$L(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}, \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1, \quad i = \overline{1, m}, \qquad (3)$$

$$\sum_{(i,j) \in P_k} x_{ij} \le 1, \quad k = \overline{1, K}, \qquad (4)$$

$$x_{ij} = \{0,1\}\ ,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Рассмотрим структуру данной задачи. Она содержит блок ограничений открытой задачи о назначениях и стандартную суммарную целевую функцию [2]. Однако, кроме этого, в задаче содержится блок ограничений вида (4). Данные ограничения отвечают за отсутствие конфликтов между претендентами и означают, что в искомое назначение требуется взять не более одного претендента из каждой конфликтной группы.

Построение алгоритмов решения. Предложим два варианта решения данной задачи, применение которых зависит от количества конфликтных множеств $P_k,\ k = \overline{1,K}$.

Алгоритм, основанный на использовании венгерского метода

Данный алгоритм целесообразно применять, когда конфликтных групп мало (в общем случае не более 3).

Суть алгоритма состоит в следующем. Исходная задача разбивается не несколько задач о назначениях с запретами [1]. Количество полученных задач соответствует числу всевозможных сочетаний элементов, взятых по одному из каждой конфликтной группы. Каждая конкретная задача о назначениях имеет вид

$$L(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\overline{c}_{ij}x_{ij} \to \min \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,n}, \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1,\ i = \overline{1,m}, \tag{8}$$

$$x_{ij} = \{0,1\},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}. \tag{9}$$

Матрица затрат $\{\ \overline{c}_{ij}\ \}_{m\times n}$ получается из исходной матрицы $\{\ c_{ij}\ \}_{m\times n}$ следующим образом: в каждой конфликтной группе $P_k,\ k = \overline{1,K}$, выбирается один элемент (i_k^*, j_k^*). Элементы c_{ij} матрицы затрат заменяются штрафами M для всех $(i,j)\in P_k,\ (i,j)\ne(i_k^*, j_k^*),\ k = \overline{1,K}$. В данной задаче в качестве штрафа можно взять число $M > n\max c_{ij}$ [6], т.е.

$$\overline{c}_{ij} = \begin{cases} M,\ (i,j)\in P_k,\ (i,j)\ne(i_k^*, j_k^*),\ k = \overline{1,K}, \\ c_{ij},\ \text{иначе}. \end{cases}$$

(10)

Каждая из полученных задач решается стандартным венгерским методом. В качестве ответа берётся та матрица назначений, которой соответствует минимальное значение целевой функции.

Алгоритм, основанный на применении двойственного метода Удзавы

Данный способ решения целесообразно применять при большом количестве (более трех) конфликтных множеств $P_k,\ k = \overline{1,K}$.

Через S обозначим множество переменных $\{x_{ij}\}$, удовлетворяющих следующим условиям задачи о назначениях:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1,\quad j = \overline{1,n}, \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1,\quad i = \overline{1,m}, \tag{12}$$

$$x_{ij} = \{0,1\},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}. \tag{13}$$

Задача при этом примет вид

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \tag{14}$$

$$\sum_{(i,j)\in P_k} x_{ij} \le 1,\ k = \overline{1,K}, \tag{15}$$

$$x_{ij} \in S,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}. \tag{16}$$

Функция Лагранжа для данной задачи записывается в виде

$$\Phi(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{k=1}^{K} y_k\left(\sum_{(i,j)\in P_k} x_{ij} - 1\right),\ y \ge 0,\ x\in S. \tag{17}$$

В результате исходная задача переписывается следующим образом:

$$\min_{x\in S}\max_{y\ge 0}\Phi(x,y), \tag{18}$$

а двойственная к ней имеет вид

$$\max_{y\ge 0}\min_{x\in S}\Phi(x,y) = \max_{y\ge 0}\omega(y). \tag{19}$$

Преобразуем функцию Лагранжа следующим образом

$$\Phi(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{k=1}^{K}\sum_{(i,j)\in P_k} y_k x_{ij} - \sum_{k=1}^{K} y_k = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\left(c_{ij} + \sum_{k:(i,j)\in P_k} y_k\right) - \sum_{k=1}^{K} y_k, \tag{20}$$

$$y \ge 0,\ x\in S.$$

В результате на первом шаге алгоритма Удзавы, общая схема которого представлена в [7, 8], решается задача о назначениях с меняющейся в процессе работы алгоритма матрицей затрат

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\left(c_{ij} + \sum_{k:(i,j)\in P_k} y_k\right) \to \min_{x\in S}. \qquad (21)$$

Окончательно алгоритм решения исходной задачи принимает следующий вид.

Алгоритм решения задачи о назначениях с конфликтами

1. Ввести начальные данные

$$y^0 \ge 0,\ \ N=0,\ \ \alpha_k^N = \frac{\max\limits_{i,j} c_{ij}}{N+1},\ \ k=\overline{1,K},\ \ N_{\max}.$$

2. Решить задачу о назначениях (21).
3. Проверить выполнение неравенств

$$\sum_{(i,j)\in P_k} x_{ij} \le 1,\ \ k=\overline{1,K}. \qquad (22)$$

Если неравенства выполняются, то X^N является оптимальным решением задачи, в противном случае переход к пункту 4.

4. Проверить останов по числу операций $N < N_{\max}$. Если неравенство выполнено, то перейти к пункту 5, иначе перейти к пункту 6.

5. Пересчитать значения двойственных переменных по формулам

$$y_k^{N+1} = \left[y_k^N + \alpha_k^N \left(\sum_{(i,j)\in P_k} x_{ij}^N - 1\right)\right]^+,\ \ k=\overline{1,K}. \qquad (23)$$

$N = N+1$. Перейти к пункту 2.

6. Проанализировать полученный результат, откорректировать при необходимости матрицу X^N. Выписать приближённое решение.

Вычислительный эксперимент. Для проведения вычислительного эксперимента разработан программный комплекс, реализующий предложенные в статье алгоритмы, основной упор в котором сделан на реализацию метода Удзавы. Комплекс реализован в среде программирования Delphi 7.0.

Протестируем алгоритм, основанный на применении двойственного метода Удзавы, на входных матрицах разной размерности и оценим количества итераций, необходимых для выполнения всех ограничений-остановов.

В таблице 1 для заданной размерности указано количество задач, на решение которых потребовалось число итераций из соответствующего интервала. Для каждой размерности решалось по 100 задач.

Таблица 1.

Алгоритм, основанный на применении двойственного метода Удзавы

Размерность задачи			Количество задач (из 100), на решение которых потребовалось число итераций из заданного интервала						Среднее время выполнения 100 итераций (сек.)
Количество претендентов, m	Количество работ, n	Количество конфликтных ограничений, k	Менее 50	От 50 до 100	От 100 до 200	От 200 до 500	От 500 до 1000	Более 1000	
10	10	5	95	4	1	0	0	0	0,01
20	20	5	82	6	3	2	3	4	0,05
30	30	5	25	29	9	15	7	5	0,11
40	40	5	10	48	13	9	12	8	0,24
50	50	5	6	35	21	16	12	10	0,4
60	60	5	0	16	10	41	15	18	0,78
70	70	5	0	8	6	29	35	32	1,1
10	10	8	68	23	7	1	0	0	0,06
20	20	8	35	41	5	2	8	9	0,1
30	30	8	14	27	6	5	28	20	0,21
40	40	8	8	16	9	18	20	29	0,63
20	20	12	46	40	9	2	0	2	0,15
30	30	12	6	36	33	8	3	14	0,35
40	40	12	3	11	10	18	32	26	0,58

Выводы. Для задачи с малым количеством конфликтных групп оказалось возможным использовать стандартный точный метод решения (а именно венгерский алгоритм), предварительно внеся в исходную информацию соответствующие изменения. Однако в общем случае данный подход оказался неприменим в частности из-за необходимости полного перебора всех возможных комбинаций наложенных запретов. В связи с этим на основе свойств, связывающих решения исходной и двойственной задач, предложен способ получения приближённого решения. С этой целью применяется алгоритм Удзавы, использующий метод субградиента. Рассмотренный в работе алгоритм основан на решении двойственных задач с помощью лагранжева ослабления некоторого количества ограничений исходных задач. При этом основным остановом алгоритма является выполнение ограничений задачи, помещённых в лагранжиан.

Из таблицы 1 видно, что для задач размерности до 50×50 алгоритм быстро сходится к оптимальному решению. При увеличении размерности задачи количество итераций, а, следовательно, и время, требуемое для достижения оптимального решения, увеличивается.

Рассмотренный алгоритм протестирован на многочисленных примерах с матрицами размерностью до 300×300. Вычислительный эксперимент показал работоспособность предложенного алгоритма.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. Задачи и методы линейного программирования. Задачи транспортного типа. М.: Либроком, 2010. 184 с. ISBN: 978-5-397-01334-5.

2. Rainer Burkard, Mauro Dell'Amico, Silvano Martello. Assignment problems. Society for industrial and Applied mathematics, Philadelphia, 2009. 382 p. ISBN 978-0-898716-63-4.

3. Burkard R., Cela E. Heuristics for biquadratic assignment problems and their computational comparison // European J. Oper. Res., 1995. Vol. 83. pp. 283-300.

4. Сергиенко И. В., Перепелица В. А. К проблеме нахождения множеств альтернатив в дискретных многокритериальных задачах // Кибернетика, 1987. №5. С. 85-93.

5. Aneja P., Nair K. R. Bicriterial transportation problem // Manag. Sci., 1979. Vol. 25. №1. pp. 73-78.

6. Малюгина О. А., Чернышова Г. Д. Использование задачи о назначениях при решении проблемы формирования штатов // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики, 2010. Вып. 8. С. 141–148.

7. Мину М. Математическое программирование: теория и алгоритмы. М.: Наука, 1990. 488 с. ISBN: 5-02-013980-7.

8. Медведева О. А., Медведев С. Н., Чернышова Г. Д. Двойственный алгоритм решения многокритериальной задачи о назначениях // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2013. № 2. С. 38–41.