Вялых С. В., аспирант,
Воронов В. П., канд. физ.-мат. наук, проф.,
Семикопенко И. А., канд. техн. наук, проф.,
Богданов Д. В., канд. техн. наук
Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова

ВЫЧИСЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ВСТРЕЧНЫХ ПЛОСКИХ ВОЗДУШНЫХ ПОТОКОВ

olimp69@narod.ru

В данной работе рассматривается встречное движение двух плоских воздушных потоков в неограниченной среде. Получены математические зависимости, позволяющие определить компоненты вектора скорости в плоскости, перпендикулярной оси образующегося вихря при повороте вектора скорости на угол π от своего первоначального направления.

Ключевые слова: *воздушный поток, вихрь, угол поворота, вектор скорости.*

Рассмотрим встречное движение двух воздушных потоков в неограниченной среде. Согласно результатам работ [1-3] встречное движение воздушных потоков способствует образованию воздушных вихрей. Каждый из воздушных потоков движется с постоянным по модулю вектором скорости:

$$u^2 = u_0^2 = const. \qquad (1)$$

Из соотношения (1) следует, что движение воздушной среды в образовавшемся вихре происходит с постоянной по модулю скоростью. При этом изменение вектора скорости на границе встречных потоков происходит только за счет поворота последнего в плоскости «XOY» согласно расчетной схемы, представленной на рисунке 1.

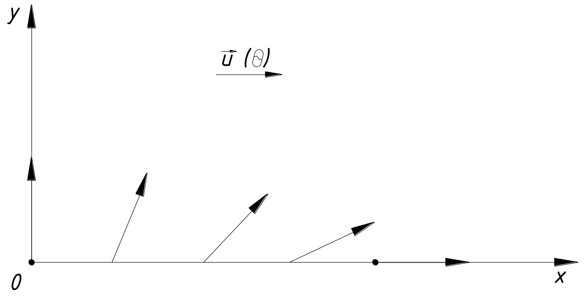

Рис. 1. Расчетная схема разворота вектора скорости на границе встречных потоков

Согласно расчетной схемы, представленной на рисунке 1, проекции вектора скорости воздушного потока на оси координат равны:

$$u_x = u_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta(x)\right) = u_0 \cdot \sin\theta(x), \qquad (2)$$

$$u_y = u_0 \cdot \cos\theta(x), \qquad (3)$$

где $\theta\,(x)$ – переменный угол, который образует вектор скорости воздушного потока с положительным направлением оси «*oy*» при перемещении вдоль оси «*x*».

Запишем выражение плотности энергии единицы длины вихря:

$$w = w_1 + w_2\,. \qquad (4)$$

Первое слагаемое в (4) прямо пропорционально квадрату изменения вектора скорости при изменении координаты:

$$w_1 = \frac{\beta}{2}\left(\frac{d\vec{u}}{dx}\right)^2 = \frac{\beta}{2}\left(\frac{du_x}{dx}\vec{i} + \frac{du_y}{dy}\vec{j}\right)^2, \qquad (5)$$

здесь $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – единичные орты соответственно вдоль осей «*ox*» и «*oy*».

С учетом (2) и (3) выражение (5) принимает следующий вид:

$$w_1 = \frac{\beta}{2}u_0^2\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2, \qquad (6)$$

Значение коэффициента пропорциональности определяем из соображений размерности, а именно

$$\beta = \rho_0 \cdot R_0^4, \qquad (7)$$

где ρ_0 – плотность воздушного потока;

R_0 – линейный размер, определяющий параметры области поворота вектора скорости при возникновении вихря;

Второе слагаемое в соотношении (4) представляет собой кинетическую энергию движения вихря вдоль оси «*ox*», отнесенную к линейному размеру цилиндрического вихря:

$$w_2 = \frac{m}{2R_0}u_x^2 = \frac{mu_0^2}{2R_0}\sin^2\theta(x), \qquad (8)$$

Если принять во внимание, что

$$m = \rho_0 \pi R_0^2 H, \qquad (9)$$

где H - высота цилиндрического вихря, равная высоте ударных элементов, тогда на основании (4) плотность энергии цилиндрического вихря будет определяться следующим выражением:

$$w = \frac{\rho_0 R_0^4}{2}u_0^2\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + \frac{\pi R_0 H}{2}\rho_0 u_0^2 \sin^2\theta(x), \qquad (10)$$

На основании (10) заключаем, что на образование цилиндрического вихря на границе раздела встречных воздушных потоков необходимая энергия равна:

$$\mathrm{E}=\int_{-\infty}^{+\infty} w dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{\rho_0 R_0^4}{2}u_0^2\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2+\frac{\pi\rho_0 R_0 H}{2}u_0^2\sin^2\theta(x)\right\}dx, \tag{11}$$

Если в соотношении (11) под знаком интеграла перейти к безразмерным переменным согласно выражению

$$\xi_1=\sqrt{\frac{\pi H}{R_0}}\cdot\frac{x}{R_0} \tag{12}$$

Тогда (11) с учетом (12) принимает вид:

$$\mathrm{E}=\frac{\pi\rho_0 R_0^2 H}{2}u_0^2\sqrt{\frac{R_0}{\pi H}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left(\frac{d\theta}{d\xi_1}\right)^2+\sin^2\theta(\xi_1)\right\}d\xi_1 \tag{13}$$

Для нахождения оптимальных параметров вихря необходимо, чтобы полная энергия (13) принимала минимальное значение. Из условия минимальности функционала (13) находим зависимость угла разворота *θ(ξ₁)* вектора скорости воздушного потока вдоль направления ξ_1. Вычислим вариацию от функционала (13) при следующих граничных условиях:

$$\theta\left(\xi_1=-\infty\right)=0,\theta\left(\xi_1=+\infty\right)=\pi,\left(\frac{d\theta}{d\xi_1}\right)\left(\xi_1=\pm\infty\right)=0\cdot \tag{14}$$

$$\delta\mathrm{E}=\mathrm{E}_0\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{d\theta}{d\xi_1}\cdot\delta\left(\frac{d\theta}{d\xi_1}\right)+\sin\theta(\xi_1)\cdot\cos\theta(\xi_1)\cdot\delta\left(\theta(\xi_1)\right)\right\}d\xi_1, \tag{15}$$

где введено следующее обозначение:

$$\mathrm{E}_0=\pi\rho_0 R_0^2 H\sqrt{\frac{R_0}{\pi H}}\cdot u_0^2\cdot \tag{16}$$

Для первого слагаемого в (15) выполним интегрирование по частям и учтем граничные условия (14), в результате получим следующий результат:

$$\delta\mathrm{E}=\mathrm{E}_0\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{-\frac{d^2\theta}{d\xi_1^2}+\sin\theta(\xi_1)\cdot\cos\theta(\xi_1)\right\}\delta\theta(\xi_1)d\xi_1 \tag{17}$$

Согласно (17) принимает минимальное значение, если $\delta E=0$. Из равенства нулю функционала (17) получаем дифференциальное уравнение, описывающее искомое изменение угла разворота вектора скорости воздушного потока.

$$\frac{d^2\theta}{d\xi_1^2}-\sin\theta(\xi_1)\cos\theta(\xi_1)=0 \tag{18}$$

Понизим порядок дифференциального уравнения (18) с помощью следующей замены:

$$\theta_1(\theta)=\frac{d\theta}{d\xi_1}\cdot \tag{19}$$

Продифференцируем (19) по переменной ξ_1:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi_1^2}=\frac{d\theta_1}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{d\xi_1}=\theta_1(\theta)\cdot\frac{d\theta_1}{d\theta}\cdot \tag{20}$$

Подставив (20) в (18), получаем дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\theta_1(\theta)\frac{d\theta_1}{d\theta}-\sin\theta\cos\theta=0 \tag{21}$$

Интегрирование (21) с учетом (19) приводит к следующему результату:

$$\frac{d\theta}{d\xi_1}=\pm\sqrt{\sin^2\theta(\xi_1)+\mathrm{A}_1}\cdot \tag{22}$$

На основании граничных условий (14) находим, что постоянная интегрирования $A_1=0$. Поэтому (22) принимает вид:

$$\frac{d\theta}{d\xi_1}=\pm\sin\theta(\xi_1)\cdot \tag{23}$$

Разделив переменные в (23), произведем интегрирование:

$$\xi_1=\pm\int\frac{d\theta}{\sin\theta}=\pm\int\frac{d\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}=\pm\int\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\cdot d\left(\frac{\theta}{2}\right)}{tg\,\frac{\theta}{2}}=\pm\int\frac{d\left(tg\,\frac{\theta}{2}\right)}{tg\,\frac{\theta}{2}}=\pm\ln\left(tg\,\frac{\theta}{2}\right)+\mathrm{A}_2\cdot \tag{24}$$

Согласно граничным условиям (14) константу интегрирования A_2 в (24) необходимо положить равной нулю и в правой части (24) оставить знак «плюс».

На основании (24) находим, что:

$$\theta(\xi_1)=2arctg\left(\exp(\xi_1)\right)\cdot \tag{25}$$

Полученное соотношение (25) с учетом замены (12) приводится к виду:

$$\theta(x) = 2arctg\left(\exp(\sqrt{\frac{\pi H}{R_0} \cdot \frac{x}{R_0}}) \right). \quad (26)$$

Очевидно, что разворот вектора скорости воздушного потока от значений $\theta = \pi$ на $x < -\infty$ до значений $\theta = 0$ на $x > +\infty$ будет описываться функциональной зависимостью вида:

$$\theta(x) = 2arctg\left(\exp(-\frac{x}{R_0}\sqrt{\frac{\pi H}{R_0}}) \right). \quad (27)$$

График функциональной зависимости (25) изображен на рисунке 1. Анализ данной зависимости показывает, что разворот вектора скорости воздушного потока на угол $\theta = \pi$ происходит практически на расстоянии $\xi_1 = 5$ в относительных единицах. Поэтому, если положить $x = \Delta/2$, здесь Δ – расстояние между двумя соседними дисками с ударными элементами, которые вращаются в противоположном направлении, если взять $\Delta = 0{,}05$ метра, тогда на основании (12) можно получить значение параметра цилиндрического вихря $R_0 = 0{,}0092$ метра.

Подстановка (26) в (2) и (3) позволяет получить следующие результаты :

$$u_1 = u_0 \sin\left\{ 2arctg\left(\exp(\sqrt{\frac{\pi H}{R_0} \cdot \frac{x}{R_0}}) \right) \right\}, \quad (28)$$

$$u_y = u_0 \cos\left\{ 2arctg\left(\exp(\sqrt{\frac{\pi H}{R_0} \cdot \frac{x}{R_0}}) \right) \right\}. \quad (29)$$

Таким образом, полученные соотношения (28) и (29) позволяют определить компоненты вектора скорости цилиндрического вихря в плоскости, перпендикулярной оси вихря при повороте вектора скорости на угол π от своего первоначального значения.

Полученные соотношения представляют собой довольно сложные аналитические зависимости

$$\tilde{v}_\varphi = \frac{const}{\xi} e^{-t_1}. \quad (30)$$

Графическая интерпретация которых представлена на рис. 2.

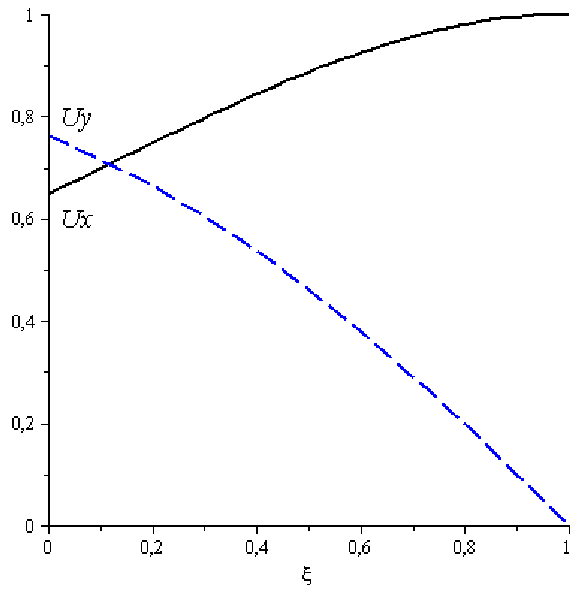

Рис. 2. Зависимость относительных компонент вектора скорости от безразмерной координаты ξ, сплошная линия соответствует значению u_x/u_0, а штриховая - u_y/u_0

Таким образом, полученные соотношения (30) позволяют определить компоненты вектора скорости в плоскости, перпендикулярной оси вихря при повороте вектора скорости на угол π от своего первоначального направления.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вилля Г. Теория вихрей: изд. 2-ое. Изд: Едитория УРСС, 2006. 264 с.

2. Гольдштик М.А. Вихревые потоки. Новосибирск: Наука. 1981. 386 с.

3. Штихлинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука. 1974. 712 с.

4. Гупта А., Лилли Д., Сайред Н. Закрученные потоки. М.: Мир, 1987. 590 с.

5. Кутателадзе С.С., Волчков Э.П., Терехов В.И. Аэродинамика и тепломассобмен в ограниченных вихревых потоках. Новосибирск: Изд. Института теплофизики СО АН СССР, 1987. 282 с.