Куценко Д.А., ст. преп.,
Синюк В.Г., канд. техн. наук, проф.
Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова

МЕТОДЫ ВЫВОДА ДЛЯ ГИБКИХ СИСТЕМ СО МНОГИМИ НЕЧЁТКИМИ ВХОДАМИ*

dakutsenko@mail.ru

При практическом применении нечёткой логики и теории нечётких множеств встаёт вопрос о разработке методов моделирования нечётких систем. На входы таких систем может поступать как точная, так и расплывчатая информация. Наиболее важной группой методов являются методы нечёткого логического вывода, позволяющие получить выходные значения системы, моделируемой набором нечётких продукционных правил. В настоящее время существует множество различных методов нечёткого логического вывода. В подавляющей части из них используются чёткие значения, поступающие на входы моделируемой системы. Известные методы для нечётких входов не применимы для большинства практических задач из-за низкой вычислительной эффективности, не позволяющей осуществить логический вывод за приемлемое время для систем с большим количеством входов. В работе описывается новый метод логического вывода на основе нечёткой степени истинности. Метод разработан для нечётких продукционных моделей систем со многими входами, на которые поступают нечёткие входные значения. В методе возможно использование различных логических операций для реализации операции нечёткой импликации. В работе проводится сравнение метода с исходным методом Заде и популярным методом Мамдани, а также показывается вычислительная эффективность предложенного метода. Метод обобщается до гибких нечётких систем.

Ключевые слова: *метод нечёткого вывода, нечёткая степень истинности, продукционная модель, система со многими входами, метод Заде, метод Мамдани.*

Введение. За последние десятилетия было предложено множество различных методов нечёткого логического вывода. Согласно классификации, приведённой в [6], все методы можно разделить на три типа — логического, типа Мамдани и типа Такаги—Сугено. Второй тип связан с работой Э. Мамдани [10], в которой был предложен эффективный метод вывода для случая, когда на входы системы поступают чёткие скалярные значения. В последнее время неоднократно отмечалось (см., например, [9]), что метод Мамдани может оказаться неадекватным для решения задач, когда входные значения представляют собой нечёткие множества. Такие задачи возникают в случае, когда исходные данные являются нечёткими либо по своей природе, либо обладают другими НЕ-факторами [2], такими как неточность, неопределённость и недоопределённость, которые могут быть преобразованы в нечёткость.

В данной статье рассматриваются методы вывода с полиномиальной вычислительной сложностью для нечётких систем логического типа и типа Мамдани при n нечётких входах.

Постановка задачи. Задача, которая решается с помощью нечёткой продукционной системы, формулируется следующим образом. Рассмотрим систему с n входами $x_1, \ldots, x_n$ и одним выходом y, представленными одноимёнными лингвистическими переменными. Пусть X_i — базовое множество значений i-го входа системы, $x_i \in X_i$, $i = \overline{1, n}$; Y — базовое множество значений выхода системы, $y \in Y$. Введём следующие обозначения. Пусть $\mathrm{Fuzzy}(Z)$ — множество, состоящее из всех нечётких подмножеств множества Z, $\mu_{\tilde{F}}: Z \to [0, 1]$ — функция принадлежности нечёткого множества $\tilde{F} \in \mathrm{Fuzzy}(Z)$. Под нечётким значением истинности будем понимать нечёткое подмножество [0, 1], где отрезок [0, 1] представляет собой множество истинностных значений, как это принято в многозначных логиках. Для нечёткого значения истинности $\tilde{V} \in \mathrm{Fuzzy}([0,1])$ введём обозначение $\tau_{\tilde{V}}: [0,1] \to [0,1]$. Взаимосвязь входов и выхода в системе описывается с помощью N нечётких правил следующего вида:

$$\tilde{R}_k\text{: Если } \left\langle x_1 \text{ есть } \tilde{A}_{1k} \right\rangle \text{ и} \ldots \text{и } \left\langle x_n \text{ есть } \tilde{A}_{nk} \right\rangle \text{, то } \left\langle y \text{ есть } \tilde{B}_k \right\rangle,\ k = \overline{1, N}, \tag{1}$$

где $\tilde{A}_{1k} \in \mathrm{Fuzzy}(X_1)$, …, $\tilde{A}_{nk} \in \mathrm{Fuzzy}(X_n)$ — термы из терм-множеств входных лингвистических переменных $x_1, \ldots, x_n$ соответственно, из которых сформирован антецедент k-го правила; $\tilde{B}_k \in \mathrm{Fuzzy}(Y)$ — терм из терм-множества выходной лингвистической переменной y, с помощью которого образуется консеквент k-го правила. Пусть заданы нечёткие множества

$\tilde{A}_i' \in \text{Fuzzy}(X_i)$, $i = \overline{1, n}$, представляющие собой реальные значения входов x_1, …, x_n. Задача заключается в определении выхода системы $\tilde{B}' \in \text{Fuzzy}(Y)$.

Особенность систем логического типа, согласно классификации, приведённой в [6], заключается в том, что правило (1) формализуется с использованием нечёткой импликации в виде нечёткого отношения $\tilde{R}_k \in \text{Fuzzy}(X_1 \times \ldots \times X_n \times Y)$ следующим образом:

$$\tilde{R}_k = (\tilde{A}_{1k} \times \ldots \times \tilde{A}_{nk}) \Rightarrow \tilde{B}_k, \quad k = \overline{1, N},$$

где «⇒» — нечёткая импликация, выражающая причинно-следственную связь между антецедентом «$\langle x_1 \text{ есть } \tilde{A}_{1k} \rangle$ и…и $\langle x_n \text{ есть } \tilde{A}_{nk} \rangle$» и консеквентом «$\langle y \text{ есть } \tilde{B}_k \rangle$» k-го правила.

Метод вывода Заде. В теории построения нечётких продукционных систем основополагающей считается работа [11], в которой Л. А. Заде предложил композиционное правило вывода (КПВ), позволяющее описывать зависимость между входом и выходом системы, указанную в правиле, в виде композиции нечётких отношений.

Рассмотрим систему с одним входом $x \in X$, одним выходом $y \in Y$ и одним правилом «Если $\langle x \text{ есть } \tilde{A} \rangle$, то $\langle y \text{ есть } \tilde{B} \rangle$», основанную на нечётком расширении классического дедуктивного умозаключения modus ponens (обобщённом modus ponens), которое является частным случаем КПВ. Оно представляется следующим образом:

Посылка 1 (правило): Если $\langle x \text{ есть } \tilde{A} \rangle$, то $\langle y \text{ есть } \tilde{B} \rangle$,

Посылка 2 (факт): $\langle x \text{ есть } \tilde{A}' \rangle$.

Заключение (результат): $\langle y \text{ есть } \tilde{B}' \rangle$.

В методе Заде правило «Если $\langle x \text{ есть } \tilde{A} \rangle$, то $\langle y \text{ есть } \tilde{B} \rangle$» выражается с помощью нечёткого бинарного отношения $\tilde{R}_k \in \text{Fuzzy}(X \times Y)$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \mathrm{I}\left(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)\right)$, где I: [0, 1] × [0, 1] → [0, 1] — операция нечёткой импликации. Выходное значение $\tilde{B}'$ в соответствии с методом определяется по формуле

$$\tilde{B}' = \tilde{A}' \circ \tilde{R}, \tag{2}$$

где «∘» — операция композиции нечётких отношений. В терминах функций принадлежности при использовании sup-t-композиции (2) перепишется следующим образом:

$$\mu_{\tilde{B}'}(y) = \sup_{x \in X} \left\{ \mu_{\tilde{A}'}(x) \overset{\mathrm{T}}{*} \mathrm{I}\left(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)\right) \right\}, \tag{3}$$

где «$\overset{\mathrm{T}}{*}$» может быть любым оператором в классе t-норм.

Главным недостатком данного метода, затрудняющим его практическую реализацию при использовании нечётких входных значений $\tilde{A}_1', \ldots \tilde{A}_n'$, является экспоненциально возрастающая сложность вычисления выхода при увеличении количества входов в системе. Например, для системы с n входами x_1, …, x_n, на которые поданы нечёткие значения $\tilde{A}_1', \ldots \tilde{A}_n'$ соответственно, вывод выходного нечёткого значения $\tilde{B}'$ принимает вид

Если $\langle x_1 \text{ есть } \tilde{A}_1 \rangle$ и … и $\langle x_n \text{ есть } \tilde{A}_n \rangle$, то $\langle y \text{ есть } \tilde{B} \rangle$,

$\langle x_1 \text{ есть } \tilde{A}_1' \rangle$ и … и $\langle x_n \text{ есть } \tilde{A}_n' \rangle$.

$\langle y \text{ есть } \tilde{B}' \rangle$.

и осуществляется следующим образом:

$$\mu_{\tilde{B}'}(y) = \sup_{(x_1, \ldots, x_n)} \left\{ \underset{i=\overline{1,n}}{\mathrm{T}} \{\mu_{\tilde{A}_i'}(x_i)\} \overset{\mathrm{T}}{*} \mathrm{I}\left(\underset{i=\overline{1,n}}{\mathrm{T}} \{\mu_{\tilde{A}_i}(x_i)\}, \mu_{\tilde{B}}(y) \right) \right\},$$

где супремум нужно брать по всем n-кам $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n$, что определяет порядок сложности вычисления $O(|X|^n)$.

Метод вывода на основе нечёткой степени истинности. Рассмотрим соотношение (3). Используя правило истинностной модификации

[12], [1], [3], можно записать $\mu_{\tilde{A}'}(x)=\tau_{\tilde{A}|\tilde{A}'}\left(\mu_{\tilde{A}}(x)\right)$, где $\tau_{\tilde{A}|\tilde{A}'}$ — нечёткая степень истинности нечёткого множества $\tilde{A}$ относительно $\tilde{A}'$, представляющая собой совместимость $\mathrm{CP}(\tilde{A},\tilde{A}')$ терма $\tilde{A}$ по отношению ко входному значению $\tilde{A}'$: $\tau_{\tilde{A}|\tilde{A}'}(\sigma)=\mu_{\mathrm{CP}(\tilde{A},\tilde{A}')}(\sigma)=\sup\limits_{\substack{x\in X\\ \mu_{\tilde{A}}(x)=\sigma}}\{\mu_{\tilde{A}'}(x)\}$. Здесь $\sigma\in[0,1]$. Отметим, что при кусочно-линейных $\mu_{\tilde{A}}(x)$ и $\mu_{\tilde{A}'}(x)$ функцию $\tau_{\tilde{A}|\tilde{A}'}(\sigma)$ можно получить в аналитической форме с помощью метода, предложенного в [4].

Перейдём от переменной *x* к переменной σ, обозначив $\sigma=\mu_{\tilde{A}}(x)$. Получим $\mu_{\tilde{A}'}(x)=\tau_{\tilde{A}|\tilde{A}'}\left(\mu_{\tilde{A}}(x)\right)=\tau_{\tilde{A}|\tilde{A}'}(\sigma)$. Функцию принадлежности бинарного нечёткого отношения $\tilde{R}\in\mathrm{Fuzzy}(X\times Y)$ тогда можно представить как $\mu_{\tilde{R}}(x,y)=\mathrm{I}\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(y)\right)=\mathrm{I}\left(\sigma,\mu_{\tilde{B}}(y)\right)$, где I — операция нечёткой импликации. Таким образом, (3) выражается

$$\mu_{\tilde{B}'}(y)=\sup_{\sigma\in[0,1]}\left\{\tau_{\tilde{A}|\tilde{A}'}(\sigma)\overset{\mathrm{T}}{*}\mathrm{I}\left(\sigma,\mu_{\tilde{B}}(y)\right)\right\}. \quad (4)$$

Для обобщения (4) для систем с *n* входами можно доказать, что если $\tilde{C}$ и $\tilde{D}$ — нечёткие суждения, соответственно имеющие вид

$$\tilde{C}=\left\langle (x_1,\ldots,x_n)\text{ есть }(\tilde{A}_1'\text{ и }\ldots\text{ и }\tilde{A}_n')\right\rangle;$$

$$\tilde{D}=\left\langle (x_1,\ldots,x_n)\text{ есть }(\tilde{A}_1\text{ и }\ldots\text{ и }\tilde{A}_n)\right\rangle,$$

где $\tilde{A}_i',\tilde{A}_i\in\mathrm{Fuzzy}(X_i),\ i=\overline{1,n},$ то значение истинности нечёткого суждения $\tilde{D}$ относительно $\tilde{C}$ записывается следующим образом:

$$\tau_{\tilde{D}|\tilde{C}}=\underset{i=\overline{1,n}}{\tilde{\mathrm{T}}}\tau_{\tilde{A}_i|\tilde{A}_i'}, \quad (5)$$

где $\tau_{\tilde{A}_i|\tilde{A}_i'}$ — нечёткое значение истинности $\tilde{A}_i$ относительно $\tilde{A}_i'$; $\tilde{\mathrm{T}}$ — расширенная по принципу обобщения *n*-местная *t*-норма.

С учётом (5) вывод выходного нечёткого значения $\tilde{B}'$ на основе нечёткой степени истинности примет вид

$$\mu_{\tilde{B}'}(y)=\sup_{\sigma\in[0,1]}\left\{\mu_{\underset{i=\overline{1,n}}{\tilde{\mathrm{T}}}\tau_{\tilde{A}_i|\tilde{A}_i'}}(\sigma)\overset{\mathrm{T}}{*}\mathrm{I}\left(\sigma,\mu_{\tilde{B}}(y)\right)\right\}. \quad (6)$$

Выражение (6) характеризуется сложностью порядка $O(n|X|^2)$.

Таким образом, применение нечёткой степени истинности для вывода в логических системах при нечётких входных значениях позволяет снизить сложность с экспоненциальной до полиномиальной.

Вывод нечёткого выходного значения для блока правил. Для того чтобы определить вывод для *N* правил (1), необходимо определить, какой метод будет использоваться при решении этой задачи. Рассмотрим метод типа Мамдани [10]. В этом случае агрегирование значений вывода $\tilde{B}_1',\ldots,\tilde{B}_N'$ по каждому правилу осуществляется путём объединения $\tilde{B}'=\bigcup\limits_{k=1}^{N}\tilde{B}_k'$ с функцией принадлежности $\tilde{B}'$, вычисляемой с помощью *t*-конормы, то есть

$$\mu_{\tilde{B}'}(y)=\underset{k=\overline{1,N}}{\mathrm{S}}\mu_{\tilde{B}_k'}(y). \quad (7)$$

Если используется логическая модель, то агрегирование выходов по каждому правилу осуществляется путём пересечения $\tilde{B}'=\bigcap\limits_{k=1}^{N}\tilde{B}_k'$ с использованием *t*-нормы, то есть

$$\mu_{\tilde{B}'}(y)=\underset{k=\overline{1,N}}{\mathrm{T}}\mu_{\tilde{B}_k'}(y). \quad (8)$$

Дефаззификация осуществляет отображение нечёткого множества $\tilde{B}'$ в чёткое скалярное значение $\bar{y}$. При использовании метода дефаззификации по среднему центру

$$\bar{y}=\frac{\sum\limits_{l=1}^{N}\bar{y}_l\cdot\mu_{\tilde{B}'}(\bar{y}_l)}{\sum\limits_{l=1}^{N}\mu_{\tilde{B}'}(\bar{y}_l)}, \quad (9)$$

где $\bar{y}_l$, $l=\overline{1,N}$ — значения, где находятся центры функций принадлежности $\mu_{\tilde{B}_k}$ [5].

При рассмотрении методов типа Мамдани $\mathrm{I}(\cdot)$ функционирует как *t*-норма, то есть

$$\mathrm{I}\left(\sigma,\mu_{\tilde{B}_k}(y)\right)=\mathrm{T}\left(\sigma,\mu_{\tilde{B}_k}(y)\right)=\sigma\overset{\mathrm{T}}{*}\mu_{\tilde{B}_k}(y). \quad (10)$$

Нечёткое множество $\tilde{B}'$, которое определяет совокупный выход блока правил с учётом (6), (7) и (8):

$$\mu_{\tilde{B}'}(\bar{y}_l)=\underset{k=\overline{1,N}}{\mathrm{S}}\left\{\sup_{\sigma\in[0,1]}\left\{\tau_k(\sigma)\overset{\mathrm{T}}{*}\mathrm{T}\left(\sigma,\mu_{\tilde{B}_k}(\bar{y}_l)\right)\right\}\right\}.$$

где $\tau_k(\sigma)=\mu_{\underset{i=\overline{1,n}}{\tilde{\mathrm{T}}}\tau_{\tilde{A}_{ik}|\tilde{A}_{ik}'}}(\sigma)$. Следовательно, отношение (9) принимает вид:

$$\bar{y}=\frac{\sum\limits_{l=1}^{N}\bar{y}_l\cdot\underset{k=\overline{1,N}}{\mathrm{S}}\left\{\sup\limits_{\sigma\in[0,1]}\left\{\tau_k(\sigma)\overset{\mathrm{T}}{*}\mathrm{T}\left(\sigma,\mu_{\tilde{B}_k}(\bar{y}_l)\right)\right\}\right\}}{\sum\limits_{l=1}^{N}\underset{k=\overline{1,N}}{\mathrm{S}}\left\{\sup\limits_{\sigma\in[0,1]}\left\{\tau_k(\sigma)\overset{\mathrm{T}}{*}\mathrm{T}\left(\sigma,\mu_{\tilde{B}_k}(\bar{y}_l)\right)\right\}\right\}}. \tag{11}$$

В оригинальном методе Мамдани [10] используется частный случай t-нормы $\mathrm{T}=\min$ и t-конормы $\mathrm{S}=\max$. Но при применении других t-норм, как, например,

$$\mathrm{T}\left(\sigma,\mu_{\tilde{B}_k}(\bar{y}_l)\right)=\max\{\sigma+\mu_{\tilde{B}_k}(\bar{y}_l)-1,0\}, \tag{12}$$

алгоритм Мамдани при нечётких входах не может быть реализован с полиномиальной вычислительной сложностью.

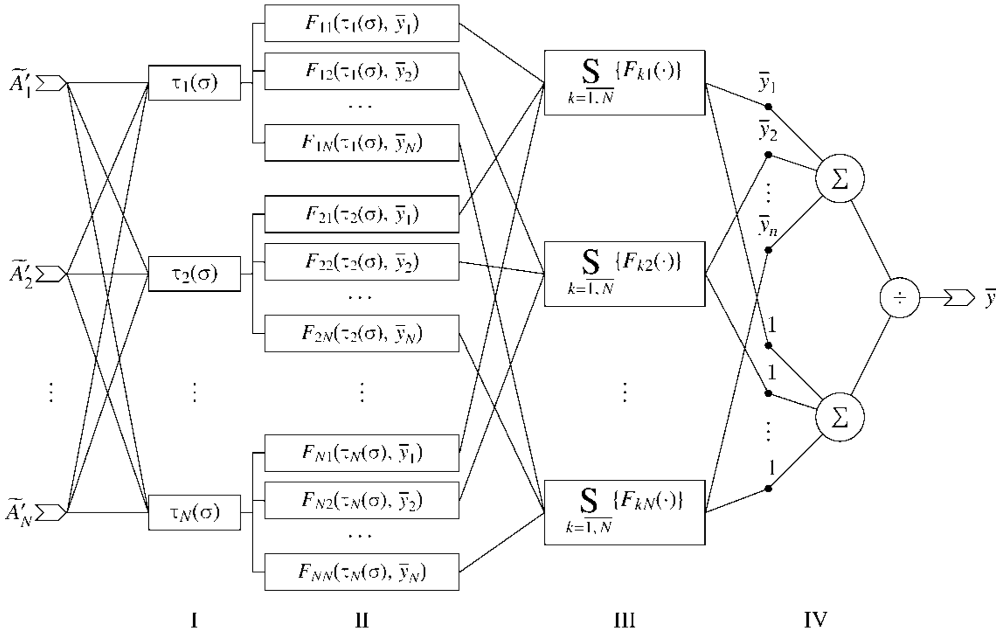

Рис. 1. Структура сети, соответствующая соотношению (11)

На рис. 1 соотношение (11) представлено в виде сетевой структуры системы, где

$$F_{kl}\left(\tau_k(\sigma),\bar{y}_l\right)=\sup\limits_{\sigma\in[0,1]}\left\{\tau_k(\sigma)\overset{\mathrm{T}}{*}\mathrm{T}\left(\sigma,\mu_{\tilde{B}_k}(\bar{y}_l)\right)\right\}.$$

При рассмотрении систем логического типа $\mathrm{I}(\cdot)$ функционирует как нечёткая импликация. Далее воспользуемся S-импликацией [8]. В этом случае

$$\mathrm{I}\left(\sigma,\mu_{\tilde{B}_k}(y)\right)=\mathrm{S}\left(1-\sigma,\mu_{\tilde{B}_k}(y)\right). \tag{13}$$

Следуя (6), (8) и (13), нечёткое множество $\tilde{B}'$ будет определяться

$$\mu_{\tilde{B}'}(y)=\underset{k=\overline{1,N}}{\mathrm{T}}\left\{\sup\limits_{\sigma\in[0,1]}\left\{\tau_k(\sigma)\overset{\mathrm{T}}{*}\mathrm{S}\left(1-\sigma,\mu_{\tilde{B}_k}(y)\right)\right\}\right\}.$$

Отсюда выражение (4.3) принимает вид:

$$\bar{y}=\frac{\sum\limits_{l=1}^{N}\bar{y}_l\cdot\underset{k=\overline{1,N}}{\mathrm{T}}\left\{\sup\limits_{\sigma\in[0,1]}\left\{\tau_k(\sigma)\overset{\mathrm{T}}{*}\mathrm{S}\left(1-\sigma,\mu_{\tilde{B}_k}(\bar{y}_l)\right)\right\}\right\}}{\sum\limits_{l=1}^{N}\underset{k=\overline{1,N}}{\mathrm{T}}\left\{\sup\limits_{\sigma\in[0,1]}\left\{\tau_k(\sigma)\overset{\mathrm{T}}{*}\mathrm{S}\left(1-\sigma,\mu_{\tilde{B}_k}(\bar{y}_l)\right)\right\}\right\}}. \tag{14}$$

Структура сети, соответствующая выражению (14), будет совпадать со структурой на рис. 1, но поменяется содержимое II и III уровней следующим образом:

$$F_{kl}\left(\tau_k(\sigma),\bar{y}_l\right)=\sup\limits_{\sigma\in[0,1]}\left\{\tau_k(\sigma)\overset{\mathrm{T}}{*}\mathrm{S}\left(1-\sigma,\mu_{\tilde{B}_k}(\bar{y}_l)\right)\right\};$$

$\underset{k=\overline{1,N}}{\mathrm{S}}\{F_{kl}(\cdot)\}$ заменяется на $\underset{k=\overline{1,N}}{\mathrm{T}}\{F_{kl}(\cdot)\}$.

Гибкие системы. Обобщим оба подхода, описанные в виде (11) и (14), и предложим общую архитектуру нечёткой продукционной системы.

Обозначим вектор из нечётких множеств следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{A}}'=\{\tilde{A}'_i\}_{i=\overline{1,n}}=\{\tilde{A}'_1,\tilde{A}'_2,\ldots,\tilde{A}'_n\}.$$

Можно показать, что системы (11) и (14) могут быть представлены в виде

$$\bar{y}=f(\tilde{\mathbf{A}}')=\frac{\sum\limits_{l=1}^{N}\bar{y}_l\cdot\mathrm{agr}_l(\tilde{\mathbf{A}}',\bar{y}_l)}{\sum\limits_{l=1}^{N}\mathrm{agr}_l(\tilde{\mathbf{A}}',\bar{y}_l)}, \tag{15}$$

где

$$\operatorname{agr}_l(\tilde{\mathbf{A}}', \bar{y}_l) = \begin{cases} \underset{k=\overline{1,N}}{\mathrm{S}} \{F_{kl}\left(\tau_k(\sigma), \bar{y}_l\right)\} & \text{для систем типа Мамдани;} \\ \underset{k=\overline{1,N}}{\mathrm{T}} \{F_{kl}\left(\tau_k(\sigma), \bar{y}_l\right)\} & \text{для систем логического типа,} \end{cases}$$

причём

$$F_{kl}\left(\tau_k(\sigma), \bar{y}_l\right) = \begin{cases} \sup\limits_{\sigma\in[0,1]} \left\{\tau_k(\sigma) \overset{\mathrm{T}}{*} \mathrm{T}\left(\sigma, \mu_{\tilde{B}_k}(\bar{y}_l)\right)\right\} & \text{для систем типа Мамдани;} \\ \sup\limits_{\sigma\in[0,1]} \left\{\tau_k(\sigma) \overset{\mathrm{T}}{*} \mathrm{S}\left(1-\sigma, \mu_{\tilde{B}_k}(\bar{y}_l)\right)\right\} & \text{для систем логического типа.} \end{cases}$$

Квазиимпликация, согласно [6], определяется как $\mathrm{I}_\nu(a,b) = H\left(N_{1-\nu}(a), b, \nu\right)$ при $\nu\in[0,1]$. Здесь $N_\nu(a) = (1-\lambda)\cdot(1-a) + \nu\cdot a$ — компромиссный оператор, $\nu\in[0,1]$, причём $N_0(a) = 1-a$, $N_1(a) = a$; функция $H(\mathbf{a},\nu) = N_\nu\left(\underset{i=\overline{1,n}}{\mathrm{S}} N_\nu(a_i)\right) = N_{1-\nu}\left(\underset{i=\overline{1,n}}{\mathrm{T}} N_{1-\nu}(a_i)\right)$ при $\nu\in[0,1]$, где $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. При изменении параметра ν от 0 до 1 квазиимпликация меняется от *t*-нормы $\mathrm{I}_0(a, b) = \mathrm{T}(a, b)$ до нечёткой импликации $\mathrm{I}_1(a, b) = \mathrm{S}(1-a, b)$ соответственно.

Воспользуемся концепцией квазиимпликации для построения гибкой нечёткой продукционной системы, структуру которой можно менять с помощью параметра ν от системы типа Мамдани до системы логического типа. В этом случае

$$\operatorname{agr}_l(\tilde{\mathbf{A}}', \bar{y}_l) = H\left(\left\{F_{kl}\left(\tau_k(\sigma), \bar{y}_l\right)\right\}_{k=\overline{1,N}}, 1-\nu\right),$$

$$F_{kl}\left(\tau_k(\sigma), \bar{y}_l\right) = \sup_{\sigma\in[0,1]} \left\{\tau_k(\sigma) \overset{\mathrm{T}}{*} \mathrm{I}_\nu\left(\sigma, \mu_{\tilde{B}_k}(\bar{y}_l)\right)\right\} = \sup_{\sigma\in[0,1]} \left\{\tau_k(\sigma) \overset{\mathrm{T}}{*} H\left(N_{1-\nu}(\sigma), \mu_{\tilde{B}_k}(\bar{y}_l), \nu\right)\right\},$$

соотношение (15) не изменится, а на рис. 1 содержимое уровня III, $\underset{k=\overline{1,N}}{\mathrm{S}} \{F_{kl}(\cdot)\}$, заменится на $\operatorname{agr}_l(\tilde{\mathbf{A}}', \bar{y}_l)$. Значение параметра ν можно найти путём обучения.

Заключение. Предложенный в работе метод нечёткого вывода для систем логического типа и для систем типа Мамдани, на входы которых поступают нечёткие значения, может использовать различные *t*-нормы для реализации операции нечёткой импликации. Метод имеет полиномиальную вычислительную сложность, что позволяет использовать его для решения задач моделирования систем с большим количеством нечётких входов. Задачей последующих исследований является разработка эволюционных и роевых алгоритмов [15] для настройки (обучения) параметров данных систем.

**Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант No 14-07-00154а).*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Борисов А. Н., Алексеев А. В., Крумберг О. А. и др. Модели принятия решений на основе лингвистической переменной. Рига. Зинатне. 1982. 256 с.

2. Душкин Р. В. Методы получения, представления и обработки знаний с НЕ-факторами. М. Вебов и Книгин. 2011. 251 с.

3. Куценко Д. А., Синюк В. Г. Косвенный метод нечёткого вывода для продукционных систем со многими входами // Программные продукты и системы. 2008. № 1. С. 45–47.

4. Куценко Д. А., Синюк В. Г. Алгоритмы нахождения СР при кусочно-линейном представлении функций принадлежности // НСМВ-2008: сборник научных трудов второй всероссийской научной конференции с международным участием. Ульяновск. УлГТУ. 2008. Т. 1. С. 87–92.

5. Пегат А. Нечёткое моделирование и управление. М. БИНОМ, Лаборатория знаний. 2009. 800 с.

6. Рутковский Л. Методы и технологии искусственного интеллекта. М. Горячая линия—Телеком. 2010. 520 с.

7. Синюк В. Г., Поляков В. М., Каменев М. В. Оптимизация одного класса нечеткой системы на основе алгоритмов дискретной и непрерывной муравьиной колонии // Вестник БГТУ им. В. Г. Шухова. 2011. № 4. С. 165–169.

8. Baczyński M., Jayaram B. Fuzzy implications. Heidelberg. Springer. 2008. 308 p.

9. Dubois D., Prade H. Abe Mamdani: A Pioneer of Soft Artificial Intelligence // Combining Experimentation and Theory. Heidelberg. Springer. 2012. P. 49–60.

10. Mamdani E. H. Applications of fuzzy algorithm for control a simple dynamic plant // Proceedings of the IEEE. 1974. V. 121. No 12. P. 1585–1588.

11. Zadeh L. A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. 1973. V. SMC-3. No 1. P. 28–44.

12. Zadeh L. A. PRUF—A meaning representation language for natural language // International Journal of Man-Machine Studies. 1978. V. 10. P. 395–460.