Леденева Т. М., д-р техн. наук, проф.,
Дубинин А. А., аспирант
Воронежский государственный технический университет

СИНТЕЗ ФУНКЦИЙ НЕЧЕТКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

akspy@mail.ru

В статье рассматривается подход к синтезу функций нечетких переменных, основанный на методе Мариноса и гипотезах относительно коэффициентов согласования, что позволяет восстановить вид функции на заданном интервале, как один из возможных вариантов ее задания.

Ключевые слова: *функция нечетких переменных, приведенные полиномиальные формы.*

Введение

В некоторых задачах, связанных с оценкой функционирования сложных систем, необходимо учитывать не только тот факт, работает или не работает данная система, но и уровень качества ее работы («работает очень хорошо», «работает довольно плохо» и т.п.). Каждой компоненте системы (подсистеме или элементу) поставим в соответствие нечеткую переменную, которая принимает значение из $[0,1]$ и представляет собой оценку характеристики состояния компоненты системы. Взаимодействие компонент системы между собой обусловливает факт существования нечеткой функции, аргументами которой являются введенные нечеткие переменные. В рамках такого подхода можно рассматривать целый спектр задач, эффективно решаемых методами нечеткой логики. В общем случае эти задачи можно разделить на задачи анализа и задачи синтеза. Задача синтеза функций нечетких переменных заключается в нахождении такого представления нечеткой функции в терминах заданной функциональной системы, чтобы для заданных переменных функция принимала заданное значение или ее значение принадлежало бы заданному промежутку. В данной статье решается именно эта задача.

1. Функции нечетких переменных

Нечеткими *переменными* будем называть переменные, принимающие значения в $[0,1]$. Функции, построенные с помощью таких переменных, называются *функциями нечетких переменных*, если их значения также принадлежат $[0,1]$. Заметим, что если $f(x_1,...,x_n)$ содержит только нечеткие переменные и операции отрицания $\bar{x} = \neg x = 1 - x$, *конъюнкции* $x_1 \wedge x_2 = \min\{x_1, x_2\}$ и *дизъюнкции* $x_1 \vee x_2 = \max\{x_1, x_2\}$, то всегда $f(x_1,...,x_n)$ является функцией нечетких переменных. Свойства данных логических операций полностью совпадают со свойствами соответствующих операций над нечеткими множествами. Заметим, что в соответствии с законами де Моргана операцию $\vee$ можно выразить через $\wedge$ и $\neg$ и наоборот, тогда достаточно использовать $\vee$, $\neg$ или $\wedge$, $\neg$ для того, чтобы представить функцию нечетких переменных, содержащую переменные $\neg$, $\wedge$, $\vee$. Иногда функцию нечетких переменных, содержащую только операции $\neg$, $\wedge$, $\vee$, называют *аналитической функцией нечетких переменных* [1]. В дальнейшем будем рассматривать только аналитические функции нечетких переменных. Полиномиальная форма функции нечетких переменных является аналогом нормальной формы для булевых функций. С помощью законов дистрибутивности любую функцию можно представить в полиномиальной форме относительно операции $\wedge$ или $\vee$.

Пусть функция $f(x_1,...,x_n)$ нечетких переменных выражена в полиномиальной форме относительно $\wedge$. Об одночлене такой полиномиальной формы говорят, что он *максимальный*, если он не поглощается никаким другим одночленом этой полиномиальной формы. Соответствующее определение можно дать максимальному одночлену в полиномиальной форме относительно $\vee$. Всякая полиномиальная форма относительно $\vee$, состоящая только из максимальных одночленов по $\wedge$, называется *приведенной полиномиальной формой относительно* $\vee$. Замена в данном определении $\vee$ на $\wedge$ и наоборот приводит к определению приведенной полиномиальной формы относительно $\wedge$. Одной и той же функции нечетких переменных может соответствовать несколько приведенных полиномиальных форм.

Для любой функции нечетких переменных существует, по крайней мере, одна приведенная полиномиальная форма относительно $\vee$ и, по крайней мере, одна приведенная полиномиальная форма относительно $\wedge$. При этом можно переходить от одного разложения к другому с последующим сокращением не максимальных одночленов. Достаточное условие равносильности двух функций нечетких переменных состоит в том, чтобы их можно было привести к одной и той же приведенной полиномиальной форме относительно $\vee$ или $\wedge$. Необходимое и достаточное условие состоит в том, чтобы у этих функций была одна и та же перечислительная таблица[2].

2. Синтез функций нечетких переменных

Рассмотрим следующую задачу, которую будем называть задачей синтеза функций нечетких переменных. Пусть функция нечетких переменных $f(x_1,...,x_n)$ является аналитической, т.е. представимой в системе $\{\neg,\wedge,\vee\}$, и известно ее значение на определенном промежутке $[\alpha_{k-1},\alpha_k]$. Требуется найти один из вариантов аналитического представления функции на заданном промежутке.

В соответствии с методом Мариноса[1], для функции вида $f(x_1,...,x_n)$, ее аргументы будут принимать значения

$$[(x_1 \geq \alpha_{k-1}) * (x_2 \geq \alpha_{k-1}) * ... * (x_n \geq \alpha_{k-1})] \wedge [(x_1 < \alpha_k) * (x_2 < \alpha_k) * ... * (x_n < \alpha_k)],$$

где операции $* \in \{\wedge,\vee\}$.

Предположим, что для величин $\{\delta_i\}$ существуют их оценки $\{\omega_i\}$, определяющие нижние и верхние границы для переменных $x_1,...,x_n$, так что

$$[(x_1 \geq \omega_1) * (x_2 \geq \omega_2) * ... * (x_n \geq \omega_n)] \wedge [(x_1 < \omega_{n+1}) * (x_2 < \omega_{n+2}) * ... * (x_3 < \omega_{2n})].$$

Введем в рассмотрение *коэффициенты согласованности* λ_{ij}, с помощью которых можно изменять границы промежутков, так что $f \in \Delta f$ при Vf заданном, т.е. положим

$$\lambda_{11}\omega_1 = \alpha_{k-1},\ \lambda_{12}\omega_2 = \alpha_{k-1},\ \ldots,\ \lambda_{ij}\omega_{2n} = \alpha_k$$

или

$$\lambda_{11} = \frac{\alpha_{k-1}}{\omega_1},\ \lambda_{12} = \frac{\alpha_{k-1}}{\omega_2},\ \ldots,\ \lambda_{ij} = \frac{\alpha_k}{\omega_{2n}}.$$

Для подтверждения гипотезы о правильности выбранного вида функции на данном промежутке, необходимо чтобы при найденных значениях переменных вычисленное значение функции совпадало с заданным вариантом.

В качестве примера рассмотрим функцию, зависящую от трех переменных $f(x_1,x_2,x_3)$. Предположим, что она задана в виде $f(x_1,.x_2,.x_3) = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$. Допустим на интервале $[\alpha_{k-1};\alpha_k]$ значение функции $f(x_1,x_2,x_3) = 0.5$. На основании метода Мариноса переходим к виду

$$P = [(P_{x_1} \nabla P_{x_2} \nabla P_{x_3}) \Delta (P'_{x_1} \Delta P'_{x_3} \Delta P'_{x_3})].$$

Выпишем соответствующие условия для переменных

$$[(x_1 \geq \alpha_{k-1}) \vee (x_2 \geq \alpha_{k-1}) \vee (x_3 \geq \alpha_{k-1})] \wedge [(x_1 < \alpha_k) \wedge (x_2 < \alpha_k) \wedge (x_3 < \alpha_k)].$$

Таким образом, для оценок имеем

$$[(x_1 \geq \omega_1) \vee (x_2 \geq \omega_2) \vee (x_3 \geq \omega_3)] \wedge [(x_1 < \omega_4) \wedge (x_2 < \omega_5) \wedge (x_3 < \omega_6)].$$

Рассмотрим значения функции на промежутке $[0{,}4;0{,}8]$. Тогда

$$[(x_1 \geq 0.4) \vee (x_2 \geq 0.4) \vee (x_3 \geq 0.4)] \wedge [(x_1 < 0.8) \wedge (x_2 < 0.8) \wedge (x_3 < 0.8)]$$

Вводим коэффициенты согласованности $\lambda_{11},\lambda_{12},\lambda_{13},\lambda_{21},\lambda_{22},\lambda_{23}$ (рис. 1).

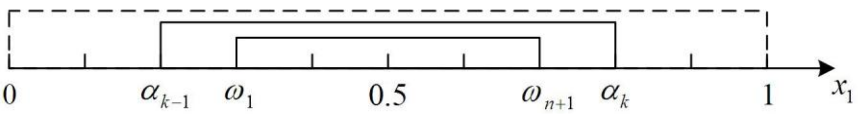

Рисунок 1. Использование коэффициентов согласованности

На рис. 1 α_{k-1}, α_k – границы промежутка, ω_1, ω_{n+1} – оценки для границ, коэффициенты согласованности λ_{ij} позволяют корректировать границы в соответствии с условием.

Таким образом, задача заключается в определении способа выбора коэффициентов согласованности для нахождения исходного вида функции нечетких переменных. Для этого рассмотрим несколько гипотез.

Гипотеза А: Чем ближе граничные значения к значению функции, тем точнее выбранный вид функции описывает принимаемые ею значения на заданном промежутке.

Пусть аргументы функции $f(x_1,...,x_n)$ принимают значения из заданных промежутков $\Delta_1,...,\Delta_n$. Идея подхода заключается в определении такого «сужение» каждого из промежутков $\Delta_i \to \left[\underline{\omega^i}, \overline{\omega^i}\right] \left(i = \overline{1,n}\right)$, чтобы в некоторой точке $\left(x_1^0,...,x_n^0\right)$, такой что $\forall i \left(x_i^0 \in \left[\underline{\omega^i}, \overline{\omega^i}\right]\right)$, значение функции $f\left(x_1^0,...,x_n^0\right)$ совпадало бы с заданным значением f^0.

Для рассмотренного выше примера смысл гипотезы А заключается в том, что если $\omega_1 \to f(x_1, x_2, x_3)$ и $\omega_4 \to f(x_1, x_2, x_3)$ в промежутке $[\alpha_{k-1}; \alpha_k]$, то $f(x_1, x_2, x_3) \to x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ в том же промежутке $[\alpha_{k-1}; \alpha_k]$ (рис.2).

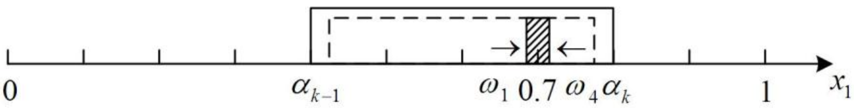

Рисунок 2. Иллюстрация гипотезы А

Для рассматриваемого примера $\omega_1 \to 0.7$, $\omega_4 \to 0.7$, и $\lambda_{11} = \dfrac{\alpha_{k-1}}{\omega_1}$, $\lambda_{21} = \dfrac{\alpha_k}{\omega_4}$. Тогда $\lambda_{11} = \dfrac{\alpha_{k-1}}{\omega_1} = \dfrac{0.4}{0.7}$, $\lambda_{21} = \dfrac{\alpha_k}{\omega_4} = \dfrac{0.8}{0.7}$. Если значения коэффициентов согласованности будут принимать значения $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13} = \dfrac{4}{7}$, $\lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23} = \dfrac{8}{7}$, то в промежутке $[0.4;0.8]$ аргументы принимают значения $x_1 = 0.5$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 0.5$. Функция $f(x_1,.x_2,.x_3) = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 = 0.5 \wedge 0.5 \wedge 0.5 = 0.5$. На основании полученных значений мы можем подтвердить гипотезу о том, что внешний вид функции $f(x_1, x_2, x_3) = 0.5$ на промежутке $[0.4;0.8]$ соответствует $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$.

Гипотеза Б: Чем ближе значения оценок к значениям границ промежутков, тем точнее выбранный вид функции описывает принимаемые ею значения на выбранном промежутке.

Пусть аргументы функции $f(x_1,...,x_n)$ принимают значения из промежутков $\Delta_1,...,\Delta_n$. Идея подхода заключается в том, чтобы определить границы промежутка $\Delta_i \to \left[\underline{\omega^i}, \overline{\omega^i}\right]$, чтобы значение функции $f(\Delta_1,...,\Delta_n)$ совпадало бы с заданным промежутком V_f.

Смысл данной гипотезы применительно к рассматриваемому примеру заключается в том, что если $\omega_1 \to \alpha_{k-1}$ и $\omega_4 \to \alpha_k$, то $f(x_1, x_2, x_3) \to f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ на $[\alpha_{k-1}; \alpha_k]$ (рис. 3).

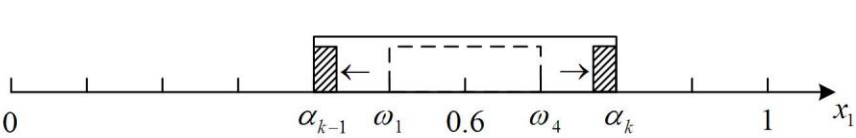

Рисунок 3. Иллюстрация гипотезы Б

Так как $\omega_1 \to 0.4$, $\omega_4 \to 0.8$, то $\lambda_{11} = \dfrac{\alpha_{k-1}}{\omega_1} = \dfrac{0.4}{0.4} = 1$, $\lambda_{21} = \dfrac{\alpha_k}{\omega_4} = \dfrac{0.8}{0.8} = 1$. В этом случае получаем, что на $[0.4;0.8]$ значения аргументов функций могут принимать значения из $[0.4;0.8]$. Вычислим согласно метода Мариноса значение полиномиальной функции произведя замену $\wedge(\vee)$ на функции min(max).

$$\left[(x_1 \ge 0.4) \vee (x_2 \ge 0.4) \vee (x_3 \ge 0.4)\right] \wedge \left[(x_1 < 0.8) \wedge (x_2 < 0.8) \wedge (x_3 < 0.8)\right].$$

Так как $\min\{[\max(0.4;0.4;0.4)][\min(0.8;0.8;0.8)]\} = 0.4$ и $f(x_1, x_2, x_3) \in [0.4;0.8]$, то можно сделать вывод о состоятельности данного вида функции.

Заметим, что, согласно предложенному подходу, будет найден лишь один из возможных вариантов задания аналитической функции нечетких переменных[3]. Очевидно, что для более конкретного решения проблемы необходима дополнительная информация о поведении функции. Например, если задано несколько промежутков изменения аргументов и функции, то, определив возможные варианты задания функции, можно объединить полученные результаты, построив нечеткую систему.

3. Алгоритм решения задачи синтеза

Приведем формальный алгоритм решения задачи синтеза функции нечетких переменных:

Шаг 1. Сделать предположение о внешнем виде функции. Вид функции может быть получен методом перебора, методом выбора по минимальным ДНФ и КНФ, а также согласно древовидному алгоритму подбора дизъюнкции конъюнкций по признаку поглощаемости.

Шаг 2. Представить функцию $f(x_1,...,x_n)$ в виде приведенного дизъюнктивного или конъюнктивного полинома, используя свойства операций нечеткой логики.

Шаг 3. Сформировать логическую структуру полинома в виде формального выражения с использованием следующих обозначений $P_x = (x \mid x \ge \delta_{k-1})$, $P_{\neg x} = (x \mid x \le 1 - \delta_{k-1})$, $P'_x = (x \mid x < \delta_k)$, $P'_{\neg x} = (x \mid x > 1 - \delta_k)$ и правил:

а) выражение вида $x_i \wedge x_j (x_i \vee x_j)$ заменяем выражением вида $P_{x_i} \Delta P_{x_j}$ $(P_{x_i} \nabla P_{x_j})$;

б) одночлены полинома, обозначенного символом $\wedge(\vee)$, заменяем соответствующими одночленами в структуре P, обозначенными символами $\Delta(\nabla)$.

Шаг 4. Составить логические выражения, соответствующие тем, которые были получены на предыдущем шаге, заменяя P_x на P'_x, $P_{\neg x}$ на $P'_{\neg x}$, $\Delta(\nabla)$ на $\nabla(\Delta)$.

Шаг 5. Выражения, полученные на шагах 2 и 3, объединяем символом Δ.

Шаг 6. На основе анализа структуры P записываем условия для переменных $x_1,...,x_n$, которым они должны удовлетворять, чтобы $f(x_1,...,x_n) \in I_k$. В полученной записи заменяем знак $>(<)$ на $\ge(\le)$.

Шаг 7. Промежуток $[0,1]$ разбить на N равных частей, определяющих $(N+1)$ дискретных значений. Каждую переменную x_k представить двоичным кодом с учетом степени дискретности.

Шаг 8. На основе выбранной гипотезы путем подбора коэффициентов согласованности λ_{nn} получить значение функции на заданном промежутке, максимально близкое к заданному значению.

Шаг 9. Сделать вывод о подтверждении или опровержении гипотезы о внешнем виде функции, описывающей принимаемые ее значения на рассматриваемом промежутке.

Заключение

Подходящий вариант задания функции нечетких переменных, очевидно, целесообразно искать в классе приведенных полиномиальных форм относительно $\vee(\wedge)$. Тогда гипотезу о виде функции можно выдвигать на основании одного из одночленов. Таких гипотез может быть несколько, так как первоначальный вид функции нам неизвестен. Проверка гипотез осуществляется на основе сопоставления известных значений функции с расчетными значениями, которые можно изменять с помощью коэффициентов согласованности. В результате мы можем найти решение, максимально приближенное к действительному виду функции.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кофман, А.* Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.

2. *Леденева, Т.М.* Обработка нечеткой информации / Т.М. Леденева – Воронеж: ВГУ, 2006. – 232с.

3. *Алексеев, А.А.* Идентификация и диагностика систем / А.А. Алексеев, Ю.А. Кораблев, М.Ю. Шестопалов – Москва: Издательский центр Академия, 2009 – 351с.