

Вялых С. В., аспирант,
Воронов В. П., канд. физ.-мат. наук, проф.,
Семикопенко И. А., канд. техн. наук, проф.

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛА В ДЕЗИНТЕГРАТОРЕ С КОМБИНИРОВАННОЙ ПОДГОТОВКОЙ СЫРЬЯ

olimp69@narod.ru

Используя метод малого параметра, предложено математическое описание движения материала в дезинтеграторе с комбинированной подготовкой сырья. В рамках плоской модели получены аналитические выражения, определяющие в зависимости от технологических параметров скорость движения частиц материала в дезинтеграторе с комбинированной подготовкой сырья.

Ключевые слова: дезинтегратор, движение, малый параметр, плоская модель.

Решение ряда задач, связанных с определением поля скоростей во вращающемся потоке несущей среды, необходимо для правильного выбора как конструктивных, так и технологических параметров в дезинтеграторах различных конструкций. Кроме того, полученные при этом аналитические выражения, определяющие скорости движения частиц, позволяют определять траектории движения и произвести математическое моделирование плоского движения частиц в дезинтеграторах с различным конструктивным исполнением узла загрузки материала в зависимости от технологических параметров.

Для математического описания движения частицы материала во вращающейся воздушной среде введем цилиндрическую систему координат r, φ, z с центром на оси симметрии в нижней части цилиндрического корпуса.

В рамках плоской детерминированной модели движение твердых сферических частиц диаметром d , плотностью ρ , во вращающемся воздушном потоке с частотой ω и динамической вязкостью μ согласно результату работы [1] описывается следующими уравнениями:

$$\frac{dv_r}{dt} = \frac{v_\varphi^2}{r} + \frac{1}{\tau}(u_r - v_r); \quad (1)$$

$$\frac{dv_\varphi}{dt} = \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{1}{\tau}(u_\varphi - v_\varphi); \quad (2)$$

$$v_r = \frac{dr}{dt}; \quad (3)$$

$$v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt}, \quad (4)$$

где t – время нахождения частицы материала во вращающемся воздушном потоке; $u_r, u_\varphi, v_r, v_\varphi$ – радиальные и окружные скорости движения, соответственно воздушной среды и частицы материала; τ – величина, имеющая размерность времени, которая определяется соотношением:

$$\tau = \frac{\rho d^2}{18\mu}. \quad (5)$$

В уравнениях (1)–(4) удобно перейти к безразмерным величинам на основании соотношений:

$$r = R\xi, \quad (6)$$

$$t = \tau \cdot t_1; \quad (7)$$

$$u_r = \omega R\tilde{u}_\xi; \quad (8)$$

$$u_\varphi = \omega R\tilde{u}_\varphi; \quad (9)$$

$$v_r = \omega R \cdot \tilde{v}_\xi; \quad (10)$$

$$v_\varphi = \omega R \cdot \tilde{v}_\varphi; \quad (11)$$

где R – расстояние от оси вращения до первого внутреннего ряда ударных элементов дезинтегратора.

С учетом (6)–(11) уравнения (1)–(4) можно привести к виду:

$$\frac{d\tilde{v}_\xi}{dt_1} = \alpha \frac{\tilde{v}_\varphi^2}{\xi} + \tilde{u}_\xi - \tilde{v}_\xi; \quad (12)$$

$$\frac{d\tilde{v}_\varphi}{dt_1} = -\alpha \frac{\tilde{v}_\varphi \cdot \tilde{v}_\xi}{\xi} + \tilde{u}_\varphi - \tilde{v}_\varphi; \quad (13)$$

$$\frac{d\xi}{dt_1} = \alpha \tilde{v}_\xi; \quad (14)$$

$$\frac{d\varphi}{dt_1} = \alpha \tilde{v}_\varphi, \quad (15)$$

где величина α определяется соотношением:

$$\alpha = \omega\tau. \quad (16)$$

Результат почленного деления уравнения (13) на \tilde{v}_φ с учетом (14) приводит к результату:

$$\frac{1}{\tilde{v}_\varphi} \frac{d\tilde{v}_\varphi}{dt_1} = \frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{dt_1} + \frac{\tilde{u}_\varphi}{\tilde{v}_\varphi} - 1. \quad (17)$$

После несложных математических преобразований уравнение (17) примет вид:

$$\frac{d}{dt_1} [\ln(\xi \cdot \tilde{v}_\varphi)] = \frac{\tilde{u}_\varphi}{\tilde{v}_\varphi} - 1. \quad (18)$$

Интегрирование уравнения (18) позволяет получить соотношение:

$$\xi \cdot \tilde{v}_\varphi = const \cdot \exp\left(\int \left(\frac{\tilde{u}_\varphi}{\tilde{v}_\varphi} - 1\right) dt_1\right). \quad (19)$$

Постоянную интегрирования, входящую в (19), можно найти исходя из начального условия:

$$v_\varphi = \omega R, \quad \text{при } r = R \quad (20)$$

которое в безразмерных величинах имеет вид:

$$\tilde{v}_\varphi(t_1 = 0, \xi = 1) = 1. \quad (21)$$

Из соотношения (19) заключаем, что в случае отсутствия окружной скорости воздушной среды формула (19) упрощается и принимает вид:

$$\tilde{v}_\varphi = \frac{const}{\xi} e^{-t_1}. \quad (22)$$

Предположим, что движение двухфазной среды в междурядном пространстве ударных элементов после схода частицы материала отвечает следующим значениям:

$$\tilde{u}_\xi = 0; \quad \tilde{u}_\varphi = \tilde{v}_\varphi. \quad (23)$$

Подстановка (23) в (19) с учетом (21) приводит к следующему результату:

$$\tilde{u}_\varphi = \tilde{v}_\varphi = \frac{1}{\xi}. \quad (24)$$

На основании (23) и (24) уравнение (12) приводится к следующему виду:

$$\frac{d\tilde{v}_\xi}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dt_1} = \alpha \cdot \frac{1}{\xi^3} - \tilde{v}_\xi \quad (25)$$

Подстановка (14) в (25) приводит уравнение (25) к виду:

$$\tilde{v}_\xi \cdot \frac{d\tilde{v}_\xi}{d\xi} + \frac{1}{\alpha} \tilde{v}_\xi = \frac{1}{\xi^3}. \quad (26)$$

На основании результата работы [2], движение частицы материала вдоль поверхности

$$\left(\tilde{v}_\xi^{(0)} + \frac{1}{\alpha} \tilde{v}_\xi^{(1)}\right) \left(\frac{d\tilde{v}_\xi^{(0)}}{d\xi} + \frac{1}{\alpha} \frac{d\tilde{v}_\xi^{(1)}}{d\xi}\right) + \frac{1}{\alpha} \tilde{v}_\xi^{(0)} + \frac{1}{\alpha^2} \tilde{v}_\xi^{(1)} = \frac{1}{\xi^2}, \quad (31)$$

на основании (31) искомая функция $\tilde{v}_\xi^{(0)}$ должна удовлетворять уравнению:

$$\tilde{v}_\xi^{(0)} \frac{d\tilde{v}_\xi^{(0)}}{d\xi} = \frac{1}{\xi^2}, \quad (32)$$

а функция $\tilde{v}_\xi^{(1)}$ является решением уравнения:

плоского ударного элемента происходит со скоростью:

$$V_0 = \omega \rho_0 \frac{\cos \beta_0 - f \sin \beta_0}{2f}, \quad (27)$$

где f – коэффициент трения частицы материала по поверхности ударного элемента; β_0 – угол, который образует радиус ρ_0 с направлением расположения плоского ударного элемента в точке соударения с частицей материала. Для радиального расположения ударных элементов $\beta_0=0$, а поэтому исходя из (27) получаем:

$$V_0 = \frac{\omega \cdot \rho_0}{2f}. \quad (28)$$

В силу незначительных размеров ударных элементов без ограничения общности можно положить, что $\rho_0 \approx R$.

Поэтому на основании сказанного получаем, что к моменту схода частицы материала с поверхности плоского ударного элемента отвечают следующие значения

$$\xi = 1, \quad v_r \cong \frac{\omega R}{2f}; \quad \tilde{v}_\xi \cong \frac{1}{2f}. \quad (29)$$

Поэтому задача о нахождении радиальной составляющей скорости частицы материала после схода ее с поверхности плоского ударного элемента сводится к решению задачи, начальные условия которой задаются (26) и (29).

В силу нелинейности уравнения (26) данная задача Коши не имеет точного аналитического решения, но благодаря наличию параметра α в уравнении (26) можно найти приближенное аналитическое решение в двух предельных случаях $\alpha \gg 1$ и $\alpha \ll 1$.

Рассмотрим случай $\alpha \gg 1$, который реализуется при относительно больших диаметрах частиц материала. Для данного случая решение уравнения (26) можно представить в следующем виде:

$$\tilde{v}_\xi = \tilde{v}_\xi^{(0)} + \frac{1}{\alpha} \tilde{v}_\xi^{(1)}, \quad (30)$$

Подстановка (30) в (26) приводит к соотношению:

$$\tilde{v}_\xi^{(0)} \cdot \frac{d\tilde{v}_\xi^{(1)}}{d\xi} - \frac{d\tilde{v}_\xi^{(0)}}{d\xi} \tilde{v}_\xi^{(1)} + d\tilde{v}_\xi^{(0)} = 0 \quad (33)$$

Решение уравнения (32), удовлетворяющее условию (29), примет вид:

$$\tilde{v}_\xi^{(0)} = \sqrt{1 + \frac{1}{4f^2} - \frac{1}{\xi^2}}. \quad (34)$$

Используя полученное соотношение (34), вычислим:

$$\frac{d\tilde{v}_\xi^{(0)}}{d\xi} = \frac{1}{\xi^3 \sqrt{1 + \frac{1}{4f^2} - \frac{1}{\xi^2}}}. \tag{35}$$

Подстановка (34) и (35) в уравнение (33) приводит к следующему результату:

$$\frac{d\tilde{v}_\xi^{(1)}}{\xi} + \frac{1/\xi^3}{1 + \frac{1}{4f^2} - \frac{1}{\xi^2}} \cdot \tilde{v}_\xi^{(1)} + 1 = 0. \tag{36}$$

Для поиска общего решения дифференциального уравнения (36) воспользуемся методом вариации произвольной постоянной. Запишем однородное уравнение, соответствующее (36):

$$\frac{d\tilde{v}_{\xi,0}^{(1)}}{d\xi} + \frac{1/\xi^3}{1 + \frac{1}{4f^2} - \frac{1}{\xi^2}} \cdot \tilde{v}_{\xi,0}^{(1)} = 0. \tag{37}$$

Разделение переменных интегрирования в (37) приводит к соотношению:

$$\frac{d\tilde{v}_{\xi,0}^{(1)}}{\tilde{v}_{\xi,0}^{(1)}} = - \frac{d\xi}{\xi \left[\left(1 + \frac{1}{4f^2} \right) \xi^2 - 1 \right]}. \tag{38}$$

Интегрирование (38) дает следующий результат:

$$\ln \tilde{v}_{\xi,0}^{(1)} = -\frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{1}{4f^2} - \frac{1}{\xi^2} \right] + \ln C. \tag{39}$$

На основании (39) находим, что решение однородного дифференциального уравнения (37) окончательно можно представить в виде:

$$C(\xi) = -\sqrt{\left(1 + \frac{1}{4f^2} \right) \xi^2 - 1} + \operatorname{arctg} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{4f^2} \right) \xi^2 - 1} + C_0. \tag{40}$$

Подставляя (40) в (41) находим:

$$v_\xi^{(1)} = \frac{-\sqrt{\left(1 + \frac{1}{4f^2} \right) \xi^2 - 1} + \operatorname{arctg} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{4f^2} \right) \xi^2 - 1}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4f^2} - \frac{1}{\xi^2}}} + C_0. \tag{41}$$

Произвольную постоянную C_0 в (41) находим на основании граничного условия:

На основании (48) находим, что:

$$\tilde{v}_{\xi,0}^{(1)} = \frac{C}{\sqrt{1 + \frac{1}{4f^2} - \frac{1}{\xi^2}}}. \tag{42}$$

Согласно методу вариации произвольной постоянной решение неоднородного дифференциального уравнения (36) ищем в виде:

$$\tilde{v}_\xi^{(1)} = \frac{C(\xi)}{\sqrt{1 + \frac{1}{4f^2} - \frac{1}{\xi^2}}}. \tag{43}$$

Подстановка (41) в (36) позволяет получить дифференциальное уравнение для нахождения неизвестной функции $C(\xi)$:

$$\frac{dC(\xi)}{d\xi} = -\sqrt{1 + \frac{1}{4f^2} - \frac{1}{\xi^2}}. \tag{44}$$

Проведем интегрирование (42):

$$C(\xi) = -\int \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{4f^2} \right) \xi^2 - 1}}{\xi} d\xi. \tag{45}$$

Интеграл в правой части (43) сводится к табличным значениям с помощью замены:

$$y = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{4f^2} \right) \xi^2 - 1}. \tag{46}$$

Постановка (44) в (43) приводит к соотношению:

$$C(y) = -\int \frac{y^2 dy}{1 + y^2} = -y + \operatorname{arctg} y + C_0. \tag{47}$$

Делая обратную замену в (45) получаем:

$$C_0 = 1 - 2f \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{2f} \tag{48}$$

С учетом (49) уравнение (47) окончательно принимает следующий вид:

$$\tilde{v}_\xi^{(1)} = \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{4f^2}\right)\xi^2 - 1} - \sqrt{\left(1 + \frac{1}{4f^2}\right)\xi^2 - 1}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4f^2} - \frac{1}{\xi^2}}} + 1 - 2f \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{2f} \cdot \quad (50)$$

Рассмотрим второй предельный случай, когда $\alpha \ll 1$.

Численный анализ нелинейного решения задачи Коши для этого случая показывает, что поведение производной в уравнении (26) можно описать как:

$$\frac{d\tilde{v}_\xi}{d\xi} \approx \frac{1}{\alpha}, \quad (51)$$

поэтому в этом случае получаем с точностью до величины первого порядка малости по α уравнение:

$$\tilde{v}_\xi \left(\alpha \frac{d\tilde{v}_\xi}{d\xi} + 1 \right) = 0. \quad (52)$$

Решение дифференциального уравнения (52), удовлетворяющее условию (29), можно приближенно описать функцией вида:

$$\tilde{v}_\xi \cong \frac{1}{2f} - \frac{1}{\alpha}(\xi - 1) \quad (53)$$

Окончательно решение уравнения (26), удовлетворяющее условию (29), представляем в следующем виде:

$$\tilde{v}_\xi = \begin{cases} \sqrt{\left\{1 + \frac{1}{4f^2} - \frac{1}{\xi^2}\right\}} + \frac{1}{\alpha} \cdot \left[\frac{\operatorname{arctg} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{4f^2}\right)\xi^2 - 1} - \sqrt{\left(1 + \frac{1}{4f^2}\right)\xi^2 - 1}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4f^2} - \frac{1}{\xi^2}}} + 1 - 2f \operatorname{arctg} \frac{1}{2f} \right] & \text{если } \alpha \gg 1 \\ \frac{1}{2f} - \frac{1}{\alpha} \cdot (\xi - 1) & \text{если } \alpha \ll 1. \end{cases} \quad (54)$$

Графики зависимости безразмерной радиальной составляющей скорости \tilde{v}_r от безразмер-

ной координаты ξ для двух различных значений α приведены на рисунках 1 и 2.

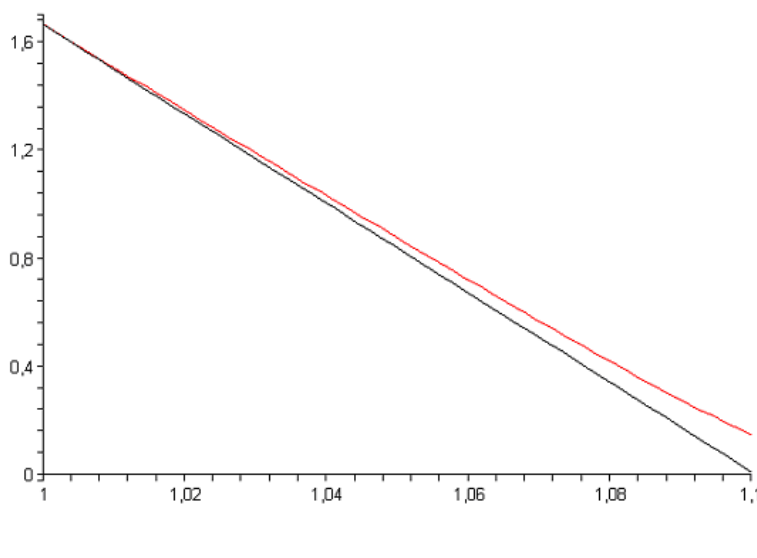


Рис.1. График зависимости безразмерной радиальной составляющей скорости от безразмерной координаты ξ : при $\omega = 50, \mu_0 = 1.84 \cdot 10^{-6}, \rho = 1600$ верхняя линия соответствует численному решению, а нижняя линия - приближенному аналитическому решению в виде ряда $\alpha = 0.06$

На рисунке 1 приведена зависимость величины (54), соответствующая значению $\alpha=0,06$, при этом верхняя линия соответствует числен-

ному решению, а нижняя линия приближенному аналитическому решению в виде ряда.

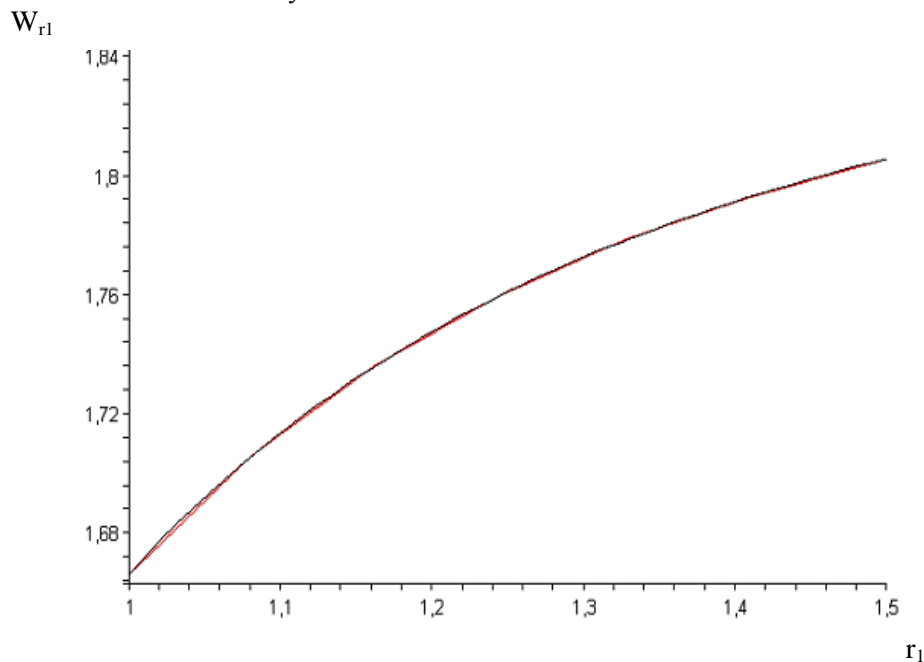


Рис. 2. График зависимости безразмерной радиальной составляющей скорости от безразмерной координаты r_1 : при $\omega = 50$, $\mu_0 = 1.84 \cdot 10^{-6}$, $\rho = 1600$ — верхняя линия соответствует численному решению, а нижняя линия — приближенному аналитическому решению в виде ряда $\alpha = 24,55$

На рисунке 2 приведена графическая зависимость величины (54) для случая $\alpha=24,15$, при этом верхняя линия соответствует приближенному аналитическому решению, а нижняя численному решению.

Анализ приведенных на рисунках 1 и 2 графических зависимостей позволяет сделать вывод о достаточно высокой степени точности приближенного аналитического решения, задаваемого формулой (54).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ушаков С.Г. Инерционная сепарация пыли // С. Г. Ушаков, Н.И Зверев – М. Энергия. 1974г. 168 с.
2. Воронов В.П. Пневмомеханический смесительно-помольный комплекс. // В.П. Воронов, И.А. Семикопенко, П.П. Пензев // Известия вузов. Строительство, 2008. №10. С. 91-95.