

Рубанов В.Г., д-р техн. наук, проф.,  
Кижук А.С., канд. техн. наук, проф.,  
Гольцов Ю.А., магистрант,  
Кариков Е.Б., ведущий инженер ЦВТ

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова

## РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА АППРОКСИМАЦИИ ДРОБНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ С ОЦЕНКОЙ ОШИБКИ

umin@mail.ru

Статья посвящена решению задачи разработки численного алгоритма вычисления дробных интегро-дифференциальных преобразований. Изложена методика выбора параметров алгоритма для достижения заданной точности преобразования. Полученные результаты продемонстрированы на примере вычисления полупроизводной гармонической функции.

**Ключевые слова:** Математическая модель, дробная производная, теплотехнический объект, теория управления, преобразование Фурье, численные методы, интегродифференциал, аппроксимация, MathCAD, погрешность

### 1. Введение

Построение математических моделей процессов, параметры которых изменяются одновременно во времени и в пространстве обычно опирается на дифференциальные уравнения в частных производных. Однако использование таких моделей при проектировании систем автоматического управления сопряжено с неудобствами, связанными с отсутствием формального аппарата синтеза систем в рамках такого описания, что заставляет прибегать к классическим моделям уравнений в полных производных, су-

$$a_n \frac{d^{\alpha_n} x}{dt^{\alpha_n}} + a_{n-1} \frac{d^{\alpha_{n-1}} x}{dt^{\alpha_{n-1}}} + \dots + a_0 \frac{d^{\alpha_0} x}{dt^{\alpha_0}} = \\ = b_m \frac{d^{\beta_m} u}{dt^{\beta_m}} + b_{m-1} \frac{d^{\beta_{m-1}} u}{dt^{\beta_{m-1}}} + \dots + b_0 \frac{d^{\beta_0} u}{dt^{\beta_0}},$$

где  $\alpha_i$  и  $\beta_k$  – рациональные дроби, наиболее часто кратные  $\frac{1}{2}$ .

Идея дробной производной труднообъяснима с точки зрения ее геометрической или физической интерпретации. Однако в современной теории управления дробные производные и дробные интегралы находят все более широкое изменение в случае управления объектами и технологическими процессами, имеющими тепловую природу [3] или в случае описания особых систем автоматизации, в структуре которых используются микроконтроллеры, реализующие законы управления дробного порядка [4,5]. Особенность программно-алгоритмической реализации дробной производной заключается в необходимости запоминания временных отсчетов сигнала на всем интервале развития динамического процесса, хотя существуют предложения в ряде источников по способам аппроксимации дробной производной, ограничивающимся конечным числом отсчетов, что вполне оправдано, если к тому же учитывать свойство «старения» информации во времени [6].

### 2. Математический аппарат для получения алгоритма дробного интегродифференцирования

Вычисление производных дробного порядка непрерывной функции  $f(t)$  может быть осно-

временно снижая при этом адекватность модели. Перспективным инструментом при этом является использование математического аппарата, где формализация модели опирается на производные дробного порядка [1], передающие одновременно свойства веществ в пространстве и свойства «памяти», а также более близкое отражающее поведение процесса или объекта с определенными параметрами, описанного дифференциальными уравнениями в частных производных [2]. Тогда дифференциальное уравнение движения представляется в форме:

$$D^{\frac{1}{2}} f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \quad (1)$$

В свою очередь дробная производная  $D^{\frac{1}{2}} f(t)$  может быть определена через полную производную от функции, получаемой в результате полуинтегрирования, т.е.

$$D^{\frac{1}{2}} f(t) = D \left\{ I^{\frac{1}{2}} f(t) \right\} = D \left\{ I^{\frac{1}{2}} f(t) \right\},$$

где  $I^{\frac{1}{2}}$  – оператор полуинтегрирования, применение которого на основе численного интегрирования состоит в выполнении следующей операции:

$$I^{\frac{1}{2}} f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \quad (2)$$

При переходе от непрерывной функции  $f(t)$  к решетчатой функции  $f[kT]$  с периодом квантования  $T$  и применении численного интегрирования методом прямоугольников получим:

$$I^{\frac{1}{2}} f[kT] = \frac{T}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f[iT]}{\sqrt{(k-i)T}}. \quad (3)$$

Если перейти к нормированному периоду квантования и ввести шаг аппроксимации  $h$ , равный  $(k-i)$ , то для дробной производной порядка  $a$  можно записать [8]:

$$D_{[a,h]}^{\alpha} f[k] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_{[a,h]}^{\alpha} f[k]}{h^{\alpha}}, \quad (4)$$

где  $a$  – нижний предел, с которого начинается учет отсчетов функции  $f[k]$ .

Как видно (4), с течением времени количество сохраненных отсчетов возрастает, что приводит к увеличению затрат памяти и машинного времени. Однако значимость отсчетов, близких к нижнему пределу  $a$ , в силу «старения» информации, которое имеет место в системах автоматического управления, становится не «актуальным», поэтому часть их может быть отброшена, что повлечет за собой некоторую погрешность [9]. Выбор интервала  $L$  «короткой памяти» определяет величину этой погрешности. Его значение можно рассчитать, исходя из свойств рассматриваемой функции  $f[n]$ . Если существует некоторое значение  $M$ , при котором  $f[n] < M$  на всем промежутке наблюдения, то на интервале  $L$  будет обеспечиваться некоторая погрешность  $\Delta[k]$ , получаемая как разность между дробными производными порядка  $\alpha$ , вычисленными для каждого интервала, т.е.

$$\Delta[k] = |D_t^\alpha f[k]| \leq \frac{ML^\alpha}{|\Gamma(1-\alpha)|} \quad (5)$$

где  $\Gamma$  – гамма-функция.

Тогда выражение (5) можно использовать для задания интервала памяти  $L$ , обеспечивающего заданную точность  $\varepsilon$ , меньшую  $\Delta[k]$  [10], т.е.

$$L \leq \left\{ \frac{M}{\varepsilon \cdot |\Gamma(1-\alpha)|} \right\}^{1/\alpha} \quad (6)$$

Это существенно снизит затраты памяти при выполнении заданной точности.

$$\omega(a, k) := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} (1 - e^{-j \cdot \varphi})^a \cdot e^{j \cdot k \cdot \varphi} d\varphi$$

$$\omega(1, 1) = -1$$

$$w(k) := \omega(-0.5, k)$$

$$\Delta(n) := \begin{array}{l} i \leftarrow 0 \\ n \leftarrow n - 1 \\ \text{while } i \leq n \\ \quad j \leftarrow n \\ \quad \text{while } \neg(j = 0) \\ \quad \quad \begin{array}{l} N_{i,j} \leftarrow N_{i-1,j-1} \text{ if } j \leq i \\ N_{i,j} \leftarrow 0 \text{ otherwise} \end{array} \\ \quad \quad j \leftarrow j - 1 \\ \quad N_{i,0} \leftarrow \text{Re}(w(i)) \\ \quad i \leftarrow i + 1 \\ N \end{array}$$

$$f(t) := \sin(t) \cdot \ln(t)$$

$$\text{test}(a, b, N) := \frac{1}{\left(\frac{b-a}{N}\right)^{-0.5}} \cdot \Delta(N) \cdot \text{getValues}(f, N, a, b)$$

$$\text{test}(25, 100, 1000)_{999} = -4.307$$

$$\text{result} := \text{test}(1, 100, 1250)_{1249} = -4.536$$

### 3. Реализация численного алгоритма в среде Mathcad

Задавая фиксированный шаг  $h$  аппроксимации функции  $f(t)$  решетчатой функцией  $f[k]$ , можно воспользоваться для расчета дробной производной выражением (4) в форме [11]:

$$D_{t_k}^\alpha f[t] \cong \frac{\Delta^\alpha f[k]}{h^\alpha} = h^{-\alpha} \sum_{j=0}^k a_j f[k-j], \quad (7)$$

где  $a_j$  – коэффициенты разложения Фурье решетчатой функции  $\Delta^\alpha f[k]$ , определяемые как  $(-1)^j \binom{\alpha}{j}$ . В матричном виде выражение (7) будет:

$$\begin{bmatrix} h^{-\alpha} \Delta^\alpha f(t_0) \\ h^{-\alpha} \Delta^\alpha f(t_1) \\ \vdots \\ h^{-\alpha} \Delta^\alpha f(t_{N-1}) \\ h^{-\alpha} \Delta^\alpha f(t_N) \end{bmatrix} = \frac{1}{h^{-\alpha}} \begin{bmatrix} a_0^{-\alpha} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1^{-\alpha} & a_0^{-\alpha} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ a_{N-1}^{-\alpha} & a_{N-2}^{-\alpha} & \dots & a_0^{-\alpha} & 0 \\ a_N^{-\alpha} & a_{N-1}^{-\alpha} & \dots & a_1^{-\alpha} & a_0^{-\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ \vdots \\ f[k] \end{bmatrix}$$

С использованием рассмотренных математических выражений в среде Mathcad получена математическая реализация на примере аппроксимации дискретного интегродифференциала [12], представленного в виде конечной разности и вычисления биномиальных коэффициентов с использованием преобразования Фурье для периодической функции вида  $f(t) = \sin(t) \ln(t)$ :

$$\text{getValues}(f, n, a, b) := \begin{array}{l} h \leftarrow \frac{b-a}{n} \\ k \leftarrow a \\ i \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \begin{array}{l} M_{i,0} \leftarrow f(k) \\ k \leftarrow k+h \end{array} \\ M \end{array}$$

$$\min\_L(M, \varepsilon, \alpha) := \left( \frac{M}{\varepsilon \cdot |\Gamma(1-\alpha)|} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\alpha := 0.5$$

$$\min\_L(M, 0.1, \alpha) = 655.005$$

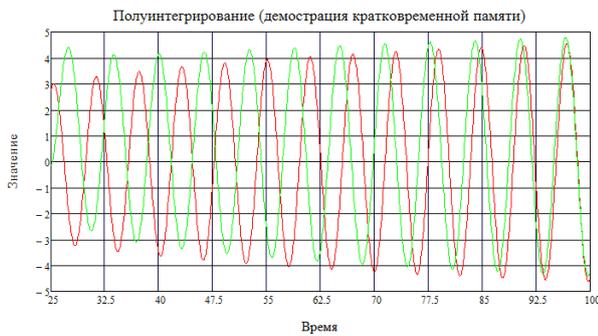


Рис. 1. Графические результаты вычислений:

- график полупроизводной для 1000 расчетных точек,
- график полупроизводной для 1250 расчетных точек

Представленный график показывает, что с течением времени расхождение между значениями интегралов с разными нижними пределами сходится с увеличением длительности интервала.

Проверим адекватность используемого алгоритма на примере гармонической функции следующего вида:

$$f(x) = \cos(x)^2 + \sin(x).$$

Определим производную дробной степени, используя соотношение:

$$\omega(a, k) := \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^{2 \cdot \pi} (1 - e^{-j \cdot \varphi})^a \cdot e^{j \cdot k \cdot \varphi} d\varphi$$

$$\omega(1, 1) = -1$$

$$w(k) := \omega(0.5, k)$$

$$\Delta(n) := \begin{cases} i \leftarrow 0 \\ n \leftarrow n - 1 \\ \text{while } i \leq n \\ \quad \begin{cases} j \leftarrow n \\ \text{while } \neg(j = 0) \\ \quad \begin{cases} N_{i,j} \leftarrow N_{i-1,j-1} \text{ if } j \leq i \\ N_{i,j} \leftarrow 0 \text{ otherwise} \end{cases} \\ \quad j \leftarrow j - 1 \\ \quad N_{i,0} \leftarrow \text{Re}(w(i)) \\ \quad i \leftarrow i + 1 \end{cases} \\ N \end{cases}$$

$$\text{coefs}(N) := \text{fill}(w\_test(N - 1, 0.5)^T)$$

$$f(t) := \sin(t) + (\cos(t))^2$$

$$\text{test}(a, b, N) := \frac{1}{\left(\frac{b-a}{N}\right)^{0.5}} \cdot \text{coefs}(N) \cdot \text{getValues}(f, N, a, b)$$

$$g(t) := \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\left(2 \cdot t + \frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$M := \text{getValues}(g, 1000, -10, 10)$$

$$\frac{d^n}{dx^n} \sin(ax + b) = a^n \sin\left(ax + b + \frac{\pi n}{2}\right),$$

при  $n=1/2$

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} \sin(ax + b) = a^{1/2} \sin\left(ax + b + \frac{\pi}{4}\right).$$

Используя формулу приведения

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1,$$

получим окончательное решение:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} (\cos^2(x) + \sin(x)) =$$

$$= \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{\cos(2x) + 1}{2} + \sin(x) \right) =$$

$$= \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 1}{2} + \sin(x) \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Математическая реализация приведенных вычислений представлена в среде Mathcad.

$$w\_test(j, a) := \begin{cases} T_{0,0} \leftarrow 1 \\ \text{for } k \in 1..j \\ \quad T_{0,k} \leftarrow \left(1 - \frac{1+a}{k}\right) \cdot T_{0,k-1} \\ T \end{cases}$$

$$\text{fill}(M) := \begin{cases} \text{for } i \in 0.. \text{rows}(M) - 1 \\ \quad \begin{cases} \text{for } j \in 0..i \\ \quad N_{i,j} \leftarrow M_{i-j} \\ \quad N_{i,i} \leftarrow 1 \end{cases} \\ N \end{cases}$$

$$\text{getValues}(f, n, a, b) := \begin{cases} h \leftarrow \frac{b-a}{n} \\ k \leftarrow a \\ i \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \begin{cases} M_{i,0} \leftarrow f(k) \\ k \leftarrow k + h \end{cases} \\ M \end{cases}$$

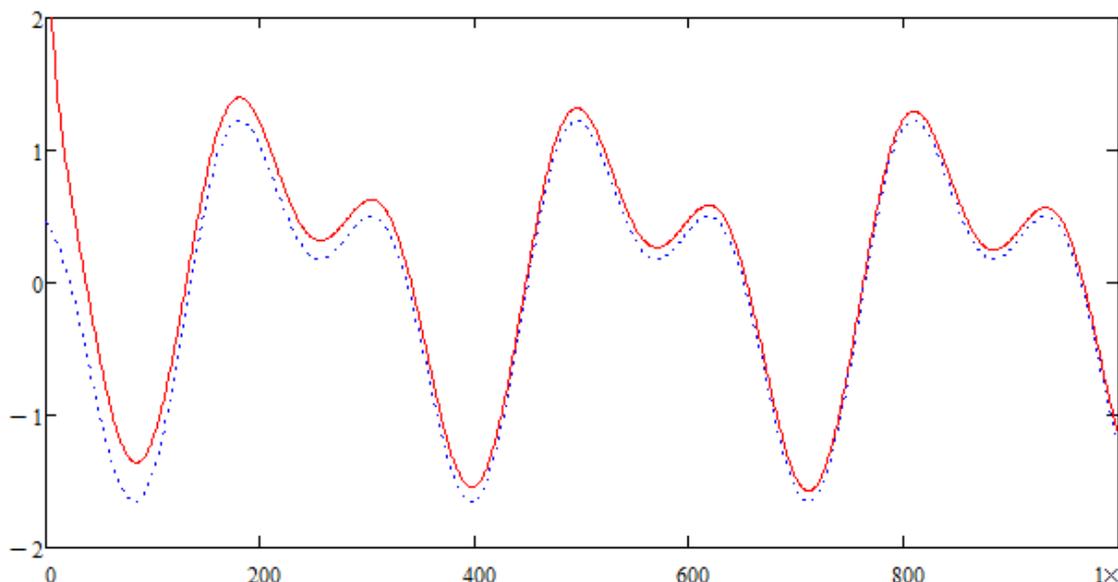


Рис. 2. Графические результаты вычислений:

..... график полупроизводной,  
 — график аппроксимации, полученный в соответствии с рассмотренным алгоритмом

Сравнение графика аппроксимации полученной функции с графиком полупроизводной, полученной аналитически, показывает достоверность расчетов и адекватность алгоритма.

#### Заключение

С использованием аппроксимации дробного интегродифференцирования реализован алгоритм расчета дробных производной и интеграла, произведена оценка ошибки, возникающей в результате использования принципа «кратковременной памяти», что позволило ограничить объем памяти, необходимой для вычисления преобразований.

Проверена точность вычислений на примере полудифференцирования тригонометрических выражений. Для периодических функции использование рассмотренного алгоритма аппроксимации позволяет получить результирующее преобразование с заданной точностью.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мишунин В.В. Устройство управления тепловым объектом с использованием закона управления дробного типа // Изв. вузов. Приборостроение, 2003. №11. С.30–34.
2. Мишунин В.В., Рубанов В.Г. Системы автоматического управления и контроля с дробно-иррациональными передаточными функциями: монография. - Белгород: Изд-во БГТУ, 2004. 255 с.
3. Порхало В.А. Автоматизация печи обжига клинкера на основе каскадной и многосвязной систем управления // Вестник белгородского

государственного технологического университета им.В.Г. Шухова. 2013. №2. С. 69–72.

4. Chen Y.Q., Petras I. and Xue D. (2009) Fractional Order Control: A Tutorial. In: Proceedings of the 2009 American Control Conference (ACC'09), С.1397-1411.

5. Бушуев Д.А., Воробьев Н.Д., Рубанов В.Г. Анализ динамических нагрузок в подшипниках помольно-смесительного агрегата как объекта автоматизации // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова 2014. № 2. С. 143-148.

6. Ефимов А. Н., Рубанов В.Г. Оптимизация процессов первичной обработки информации в АСУ. – К.: «Техника», 1967. 144 с.

7. Бабенко, Ю. И. Метод дробного дифференцирования в прикладных задачах теории теплообмена. – СПб.: НПО «Профессионал», 2009. 584 с.

8. R. Capponetto G. Dangola L. Fortuna I. Petras. Fractional Order Systems. - World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2010. 196 с.

9. I. Podlubny. Fractional Differential Equations. – Academic Press, 1999. 340 с.

10. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. - Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

11. Shantanu Das. Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. 240 с.

12. С. В. Поршнева, И. В. Беленкова. Численные методы на базе Mathcad (+ CD). С-Пб: БХВ-Петербург, 2005. 456с.