

DOI: 10.34031/2071-7318-2021-7-3-25-31

**\*Юрьев А.Г., Смоляго Н.А., Яковлев О.А.**

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова

\*E-mail: yuriev\_ag@mail.ru

## ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

**Аннотация.** Одним из положений метода расчета строительных конструкций по предельным состояниям является удовлетворение эксплуатационным требованиям в отношении перемещений их элементов под нагрузкой. Актуальной проблемой является их определение на стадии упруго-пластического деформирования материала. Предложена методика ее решения для случая диаграммы Прандтля. Стержневая система представлена двухпролетной статически неопределимой балкой. Рассмотрены ее предельное состояние по несущей способности, а также промежуточный этап деформирования. Введение приведенного момента позволяет распространить формулу Мора-Максвелла за предел линейной упругости. Использование классических физических моделей механики деформируемого твердого тела приводит к решению проблемы в аналитическом виде. Для проверки теоретических результатов, полученных по предлагаемой методике, были проведены эксперименты. В одном из них испытывалась двухпролетная балка с пролетом 50 см и поперечным сечением  $3 \times 0,42$  см из дюралюминия. Предварительно были получены механические характеристики материала. Перемещения измерялись с помощью индикаторов часового типа. Максимальная нагрузка (428 Н) в каждом из пролетов балки составила 80 % от предельной величины. При этом балка имела упруго-пластические области. Эксперимент выявил зависимость перемещений от нагрузки, приемлемую для обеих стадий деформирования: линейный график при законе Гука и кривую при наличии пластических деформаций. Отклонения от теоретических значений составляли не более 3,3 %.

**Ключевые слова:** стержневая система, статически неопределимая балка, упруго-пластическое состояние материала элемента конструкции, перемещения под нагрузкой.

**Введение.** Проектирование строительных конструкций в настоящее время основывается на их расчете по методу предельных состояний. Предельным считается состояние, при котором конструкция перестает удовлетворять эксплуатационным требованиям. Различают две группы предельных состояний. Первая группа квалифицирует непригодность конструкции к эксплуатации по причине потери несущей способности, вторая – нарушение функционирования по таким причинам, как чрезмерные деформации, образование и раскрытие трещин.

Расчет по второй группе предельных состояний содержит условие, чтобы перемещения элементов конструкции под нагрузкой не превышали предельного значения, определяемого нормами. При этом актуальной является проблема определения перемещений элементов строительных конструкций, находящихся в упруго-пластической стадии деформирования [1–13].

**Методика исследования.** В данной работе решение указанной выше проблемы осуществляется применительно к статически неопределимой балке с учетом выполнения нормативных требований (СП 20.13330.2016 «Нагрузки и воздействия». Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85\*). В основу расчета положена диаграмма Прандтля [14–16], начальный участок ко-

торой свидетельствует о линейно-упругом деформировании материала вплоть до предела текучести  $\sigma_y$ . За ним следует площадка текучести с теоретически неподдающимся ограничением и постоянными деформациями при напряжении  $\sigma_y$ .

Расчет по первой группе предельных состояний ведется при расчетной нагрузке, а по второй – по ее нормативной величине. Исчерпание несущей способности балки сочетается с образованием определенного числа пластических шарниров [17, 18], превращающих геометрически неизменяемую систему в механизм. Из этого условия устанавливается предельная нагрузка. Естественно, при определении перемещений учитывается ее доля, соответствующая нормативной нагрузке. Этот факт имеет формальный характер и не влияет на разработку метода определения перемещений.

**Основная часть.** В качестве примера примем двухпролетную балку, нагруженную силами  $F$  так (рис. 1, а), что наибольший изгибающий момент в пролете оказывается равным его аналогу на опоре (рис. 1, б). В этом случае возможно не поэтапное, а одновременное возникновение трех пластических шарниров, превращающих балку в механизм, что приводит к непосредственной картине упруго-пластического состояния балки в момент потери ее несущей способности.

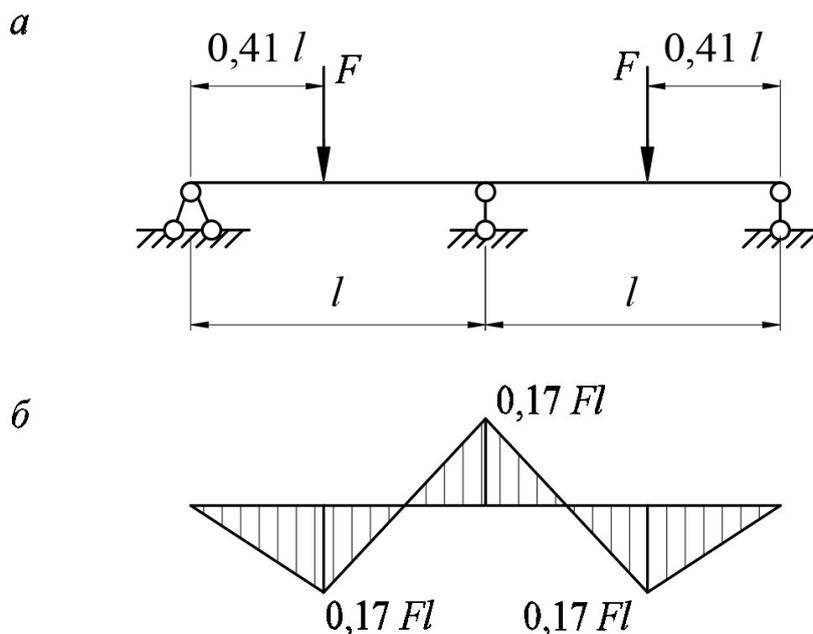


Рис. 1 Двухпролетная балка:  
а – расчетная схема, б – эпюра моментов

Для этого состояния представим расчетную схему балки в ином виде (рис. 2, а). На эпюре изгибающих моментов (рис. 2, б) введены обозначения:

$M_{(y)}$  – момент, соответствующий появлению пластических деформаций в крайних волокнах по высоте поперечного сечения балки;

$M_{(y) \text{ lim}}$  – предельный момент, соответствующий появлению пластического шарнира.

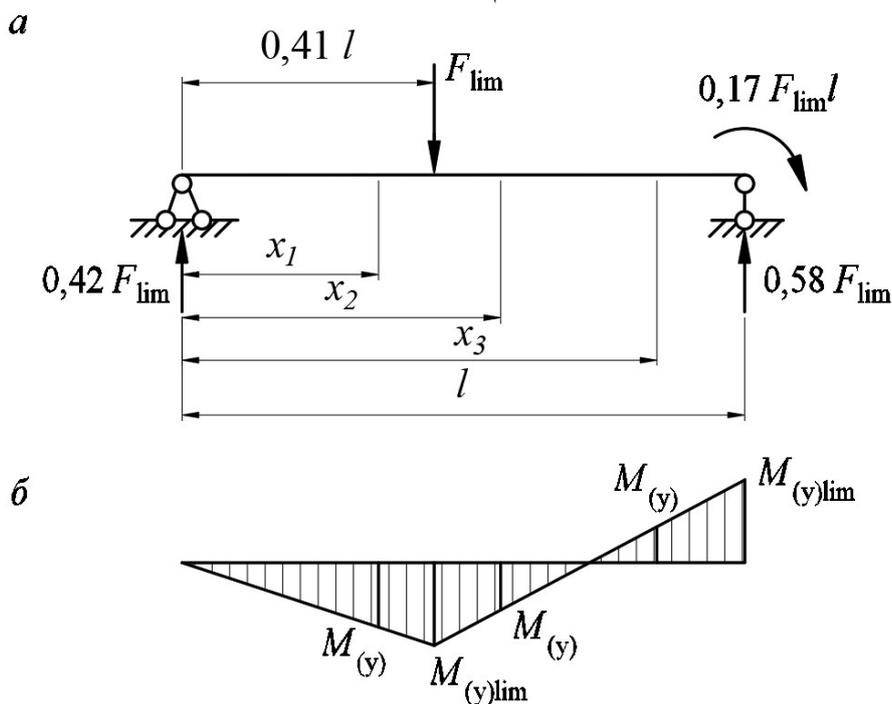


Рис. 2 Левый пролет на рис. 1:  
а – расчетная схема, б – эпюра моментов

При этом  $M_{(y)} = \sigma_y W = \sigma_y \frac{bh^2}{6}$ , а  $M_{(y) \text{ lim}} = \sigma_y W_{(y)} = \sigma_y \frac{bh^2}{4}$ , где  $b$  и  $h$  – ширина и высота сечения балки,  $W$  – момент сопротивления изгибу,  $W_{(y)}$  – ее аналог в пластическом шарнире.

Таким образом,  $M_{(y) \text{ lim}} = 0,17 F_{\text{lim}} l = \frac{1}{4} \sigma_y b h^2$ , откуда  $F_{\text{lim}} = 1,47 \sigma_y \frac{bh^2}{l}$ .

Рассматривая последовательно участки балки с текущими координатами  $x_1 (0 \leq x_1 \leq$

0,41l),  $x_2(0,41l \leq x_2 \leq 0,705l)$ ,  $x_3(0,705l \leq x_3 \leq l)$ , из условия  $|M| = M_{(y)}$  составляем уравнения для определения координат балки с начальными пластическими деформациями. Для первого участка такое уравнение имеет вид:

$$0,42 \cdot 1,47 \sigma_y \frac{bh^2}{l} x_{1(0)} = \sigma_y \frac{bh^2}{6},$$

откуда  $x_{1(0)} = 0,27l$ . Аналогично находим  $x_{2(0)} = 0,51l$ ;  $x_{3(0)} = 0,9l$ .

Таким образом, упруго-пластические области в балке имеют границы:  $0,27l \leq x \leq 0,51l$ ;  $0,9l \leq x \leq l$ .

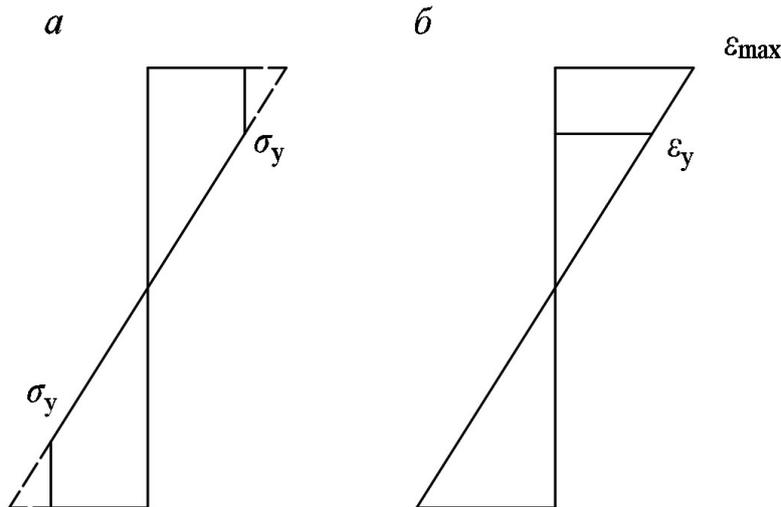


Рис. 3. Эпюра напряжений (а) и деформаций (б) в поперечном сечении

Фактической эпюре напряжений соответствует момент  $M$ , а условной эпюре – приведенный момент  $M_{red}$ . В данном случае имеем [19]:

$$M_{red} = \frac{M_{(y)}}{\sqrt{3 - \frac{2M}{M_{(y)}}}} \quad (1)$$

Отсчитывая на каждом участке балки с напряжениями  $\sigma > \sigma_y$  локальную координату  $\bar{x}$  от большей ординаты  $M_b$  в направлении меньшей граничной ординаты  $M_a$ , представим уравнение в виде:

$$M = M_b - \frac{M_b - M_a}{l_{loc}} \bar{x}, \quad (2)$$

где  $l_{loc}$  – длина участка балки, материал которой находится в упруго-пластическом состоянии.

Выражение (1) принимает вид:

$$M_{red} = \frac{M_{(y)}}{\sqrt{3 - \frac{2}{M_{(y)}} (M_b - \frac{M_b - M_a}{l_{loc}} \bar{x})}} \quad (3)$$

Для вычисления интегралов в формуле Мора–Максвелла по правилу Верещагина необходимо установить площадь и координату  $\bar{x}_c$  центра тяжести эпюры  $M_{red}$ .

Известно, что формула Мора–Максвелла для перемещений применяется при линейно-упругих деформациях. Чтобы использовать ее в упруго-пластической стадии деформирования материала, вводится приведенный момент.

По гипотезе плоских сечений эпюре напряжений, показанной на рис. 3, а сплошной линией, соответствует эпюра деформаций на рис. 3, б. Для эпюры напряжений, продолженной штрихами, соответствующей линейно-упругому материалу, эпюра деформаций не изменится.

Площадь эпюры  $M_{red}$  равна:

$$\omega = \int_0^{l_{loc}} M_{red} d\bar{x}, \quad (4)$$

статический момент эпюры  $M_{red}$ :

$$S = \int_0^{l_{loc}} M_{red} \bar{x} d\bar{x}, \quad (5)$$

расстояние до центра тяжести эпюры  $M_{red}$  от большей ординаты –  $\bar{x}_0 = \frac{S}{\omega}$ . (6)

Балку разбиваем на 6 участков: 1)  $0 \leq x \leq 0,27l$ ; 2)  $0,27l \leq x \leq 0,41l$ ; 3)  $0,41l \leq x \leq 0,51l$ ; 4)  $0,51l \leq x \leq 0,705l$ ; 5)  $0,705l \leq x \leq 0,9l$ ; 6)  $0,9l \leq x \leq l$ . 1-му, 4-му и 5-му участкам присущи линейно-упругие деформации, 2-й, 3-й и 6-й участки находятся в упруго-пластическом состоянии.

Принимая во внимание, что в рассматриваемом случае  $M_{(y)lim} = 1,5M_y$  и используя формулы (4) – (6), находим для второго участка:  $\omega = 0,28M_{(y)}l$ ;  $S = 0,013M_{(y)}l^2$ ;  $\bar{x}_0 = 0,046l$ ; для 3-го и 6-го участков:  $\omega = 0,2M_{(y)}l$ ;  $S = 0,0067M_{(y)}l^2$ ;  $\bar{x}_0 = 0,033l$ .

Перемещение в точке  $K$  балки определяется по формуле

$$f = \frac{1}{EI} \sum \omega_y, \quad (7)$$

где  $y$  – координата эпюры  $M$  от единичной силы в точке  $K$ , взятая в точке, соответствующей центру тяжести площади  $\omega$ ;

$E$  – модуль продольной упругости,

$I$  – момент инерции поперечного сечения балки.

Вычислим перемещение в точке приложения силы  $F$ , то есть  $f_F$ .

В табл. 1 представлены необходимые данные, в том числе указанные значения  $y$  с «единичной» эпюры, имеющей вид треугольника с максимальной ординатой  $0,242l$ .

Таблица 1

Компоненты формулы (7)

№ участка	1	2	3	4	5	6
$\omega, M(y)l$	0,135	0,28	0,2	0,098	-0,098	-0,2
$\bar{x}_0, l$	0,18	0,364	0,443	0,561	0,848	0,967
$y, l$	0,11	0,21	0,23	0,18	0,07	0,01

В итоге получаем:

$$f_F = \frac{0,128M_{(y)}l^2}{EI} \quad (8)$$

Полученная формула выражает вертикальное перемещение в момент исчерпания несущей способности конструкции. Расчет по второй группе предельных состояний ведется по нормативной нагрузке, которая в определенной мере меньше ее предельного значения. В этом случае  $M_{(y)lim} \neq 1,5M_{(y)}$ , ввиду отсутствия пластических шарниров, и формула (8) имеет другой коэффициент (см. ниже).

Для определения границ упруго-пластических областей остается прежнее условие:  $|M| = M_{(y)}$ .

Следует отметить, что в расчете не учитывалось влияние поперечных сил, которые по имеющимся данным [20] оказывают не столь значительное влияние на перемещения балки.

Для проверки теоретических формул, полученных по предложенной методике, были проведены эксперименты (рис. 4). В одном из них испытывалась двухпролетная балка из дюралюминия. Предварительно были получены механические характеристики материала:

$$\sigma_y = 343 \text{ МПа}, E = 7,17 \cdot 10^4 \text{ МПа}.$$

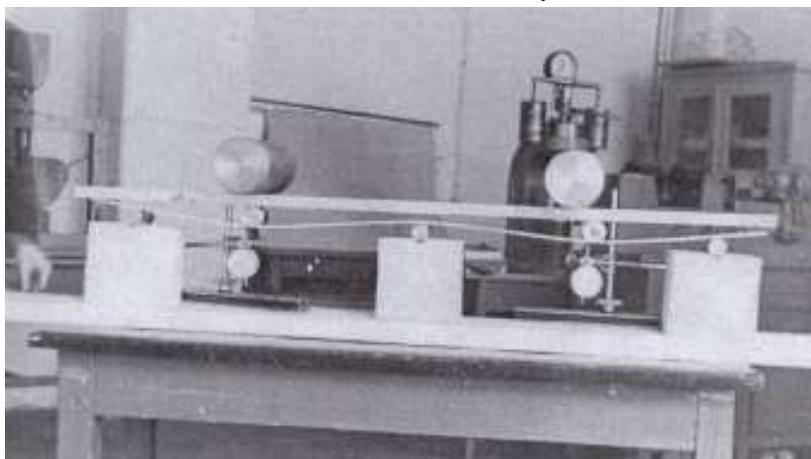


Рис. 4 Экспериментальная установка

Балка имела пролеты  $l=50$  см, ширину сечения  $b=3$  см, высоту сечения  $h=0,42$  см.

Предельная нагрузка определена из уравнения

$$M_{(y)lim} = 0,17F_{lim}l = \frac{1}{4}\sigma_ybh^2$$

и составила 534Н.

С учетом того, что момент  $M_{(y)}$  равен  $\frac{1}{6}\sigma_ybh^2$ , то есть в 1,5 раза меньше  $M_{(y)lim}$ , его появление в сечении под силой  $F$  будет соответствовать нагрузке 356 Н. Интервал нагружения балки находился в пределах от 0 до 428 Н. Балка

имела упруго-пластические области  $16,83 \text{ см} \leq x \leq 22,97 \text{ см}$ ,  $47,53 \text{ см} \leq x \leq 50 \text{ см}$ . Формула для перемещений имеет вид:

$$f_F = \frac{0,072M_{(y)}l^2}{EI} \quad (9)$$

С учетом исходных данных, в том числе  $M_{(y)}=3025$  Н·см, теоретическое значение перемещения при нагрузке 428 Н равно  $f_F = 4,1$  см.

Эксперимент выявил зависимость  $F \sim f$ , приемлемую для обеих стадий деформирования материала балки. При нагружении в пределах до

356 Н отклонения от линейного графика составили 1–1,5 % от теоретических значений. В дальнейшем наблюдалось искривление графика в связи с развитием пластических деформаций. При нагрузке 428 Н перемещение составило 3,97 см, что на 3,3 % отличается от теоретического значения.

**Выводы.** Формула Мора–Максвелла получила распространение на случай упруго-пластических деформаций в элементах конструкции. Теоретические результаты подтверждены экспериментом. Практическое использование методики исследования деформирования несущих конструкций за пределом упругости связано с их расчетом по второму предельному состоянию, что в конечном итоге позволяет определить оптимальные параметры сечений элементов.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Григорьев А.С. Исследование работы круглой мембраны при больших прогибах за пределами упругости // Инженерный сборник. М.: АН СССР, 1951. Т.9. С. 99–112.
2. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М.: ИЛ, 1963. 248 с.
3. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.
4. Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. М.: Мир, 1964. 156 с.
5. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 380с.
6. Majid K.I. Non-linear structures. Matrix methods of analysis and design by computers. London: Butterworths, 1972. 343 с.
7. Чирас А.А., Боркаускас А.Э. Каркаускас Р.П. Теория и методы оптимизации упруго-пластических систем. Л.: Стройиздат, 1974. 280с.
8. Биргер И.А. Общие алгоритмы решения задач теорий упругости, пластичности и ползучести// Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975. С. 51–73.
9. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. В 3-х т. Т.1. М.: Наука, 1975. 832с.
10. Martin J.B. Plasticity: fundamental and general results. Cambridge: MIT Press, 1975. 931 с.
11. Prathap G., Varadan T.K. The inelastic large deformation of beams // Trans. ASME. 1976. E.43. №4. С. 689–690.
12. Юрьев А.Г. Вариационные принципы строительной механики. Белгород: Изд-во БелГТАСМ. 2002. 90 с.
13. Юрьев А.Г., Толбатов А.А., Смоляго Н.А., Яковлев О.А. Рациональные сечения бруса при косом изгибе // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2017. №11. С. 60–63.
14. Ленский В.С. Упругость и пластичность. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. 104 с.
15. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 390 с.
16. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики. М.: Стройиздат, 1978. 205с.
17. Ржаницын А.Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. М.: Госстройиздат. 1954. 287 с.
18. Юрьев А.Г. Решение нелинейных задач строительной механики М.: Изд-во МИСИ, 1977. 128с.
19. Давидов И.В. Определение перемещений в сжато-изогнутых элементах при их работе за пределом упругости // Труды Харьковского инженерно-строительного института. Вып. 4. 1955. С. 167–182.
20. Ellyin F., Deloin R. The effect of shear on yielding of structural members. Int. J. Solids and Struct. 1972. 8. №3. С. 297–314.

#### Информация об авторах

**Юрьев Александр Гаврилович**, доктор технических наук, профессор. E-mail: yuriev-ag@mail.ru. Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова. Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, д. 46.

**Смоляго Нина Алексеевна**, кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической механики и сопротивления материалов. E-mail: Smoliago@mail.ru. Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова. Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, д. 46.

**Яковлев Олег Александрович**, старший преподаватель кафедры теоретической механики и сопротивления материалов. E-mail: yak-oleg@yandex.ru. Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова. Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, д. 46.

Поступила 10.12.2021 г.

© Юрьев А.Г., Смоляго Н.А., Яковлев О.А., 2022

\*Yuriev A.G., Smolyago N.A., Yakovlev O.A.

Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov

\*E-mail:yuriev\_ag@mail.ru

## DISPLACEMENTS IN PIVOTAL SYSTEMS OVER ELASTICITY LIMIT

**Abstract.** One of the provisions of the method for calculating building structures by the limiting state is the satisfaction of the operational requirements in relation to the displacements of their elements under load. An urgent problem is their determination at the stage of elastic-plastic deformation of the material. A technique is proposed for its solution for the case of the Prandtl diagram. The core system is a two-span statically indeterminate beam. Its limiting state in terms of bearing capacity, as well as an intermediate stage of deformation, are considered. The introduction of the reduced moment makes it possible to extend the Mohr-Maxwell formula beyond the limit of linear elasticity. The use of classical physical models of solid mechanics leads to the solution of the problem in an analytical form. Experiments were carried out to test the theoretical results obtained by the proposed method. In one of them, a two-span beam with a span of 50 cm and a cross section of  $3 \times 0.42$  cm made of duralumin was tested. The mechanical characteristics of the material were previously obtained. Displacements were measured with the help of indicators. The maximum load (428 N) in each of the spans of the beam was 80 % of the limit value. In this case, the beam had elastic-plastic regions. The experiment revealed the dependence of displacements on the load, acceptable for the form of deformation: a linear graph with Hooke's law and a curve in the presence of plastic deformations. Deviations from theoretical values were no more than 3.3 %.

**Keywords:** pivotal system, static undefinable beam, elastic-plastic deformation, state of material of construction element, displacements under loading.

## REFERENCES

1. Grigoriev A.S. Work research of circular membrane under large deflections over elastic limit [Issledovanie raboty krugloj membrany pri bol'shikh progibah za predelami uprugosti]. Engineering collection. M.: AN SSSR, 1951. Vol. 9. Pp. 99–112. (rus)
2. Eshelbi J. Continual theory of dislocation [Kontinual'naya teoriya dislokacij]. M.: IL, 1963. 248 p. (rus)
3. Tomas T. Plastic flow and destruction in solids [Plasticheskoe techenie i razrushenie v tverdyh telah]. M: Mir, 1964. 308 p. (rus)
4. Olshak V., Richlecky Ya., Urbanovsky V. Plasticity theory of inhomogeneous solids [Teoriya plastichnosti neodnorodnykh tel]. M.: Mir.1964. 156 p. (rus)
5. Moiseev N.N. Asymptotic methods of non-linear mechanics [Asimptoticheskie metody nelinejnoj mekhaniki]. M.: Nauka, 1969. 380 p. (rus)
6. Majid K.I. Non-linear structures. Matrix methods of analysis and design by computers. London: Butterworths, 1972. 343 p.
7. Chiras A.A., Borkauscas A.E., Karkauscas R.P. Theory and methods of optimization of elastic-plastic systems [Teoriya i metody optimizacii uprugoplasticheskikh sistem]. L.: Stroyizdat, 1974. 280p. (rus)
8. Birger I.A. Total algorithms of problems solution of elasticity, plasticity and creeping theories [Obshchie algoritmy resheniya zadach teorij uprugosti, plastichnosti i polzuchesti]. Successes of deformed mediums mechanics. M.: Nauka, 1975. Pp. 51–73. (rus)
9. Filin A.P. Applied mechanics of deformable solids [Prikladnaya mekhanika tverdogo deformiruемого tela]. In 3 volumes. Vol.1. M.: Nauka, 1975. 832 p. (rus)
10. Martin J.B. Plasticity: fundamental and general results. Cambridge MIT Press, 1975. 931 p.
11. Prathap G., Varadan T.K. The inelastic large deformation of beams. Trans. ASME. 1976. E.43. No4. Pp. 689–690.
12. Yuriev A.G. Variational principles of structure mechanics [Variacionnye principy stroitel'noj mekhaniki]. Belgorod: Publishing house of BelGTASM. 2002. 90p. (rus)
13. Yuriev A.G., Tolbatov A.A., Smolyago N.A., Yakovlev O.A. [Racional'nye secheniya brusa pri kosom izgibe]. Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov. 2017. No11. Pp. 60–63. (rus)
14. Lensky V.S. Elasticity and plasticity [Uprugost' i plastichnost']. M.-L.: GITTL, 1950. 104 p. (rus)
15. Sokolovsky V.V. Plasticity theory [Teoriya plastichnosti]. M.: Visshaya shkola, 1969. 390 p. (rus)
16. Lukash P.A. Bases of nonlinear structure mechanics [Osnovy nelinejnoj stroitel'noj mekhaniki]. M.: Stroyizdat, 1978. 205p. (rus)
17. Rzhancin A.R. Structures calculation with regard to plastic properties of materials [Raschet sooruzhenij s uchetom plasticheskikh svojstv materialov]. M.: Gosstroyizdat, 1954. 287 p. (rus)
18. Yuriev A.G. Solution of nonlinear problems of structure mechanics [Reshenie nelinejnykh zadach stroitel'noj mekhaniki]. M.: Publishing house of MISI, 1977. 128 p. (rus)

19. Davidov I.V. Definition of displacements in concisely curved elements for their work over elasticity limit [Opredelenie peremeshchenij v szhatykh elementah pri ih rabote za predelom uprugosti]. Works of Kharkov engineering building institute. Ed.4. 1966. Pp. 167–182. (rus)

20. Ellyin F, Deloin R. The effect of shear on yielding of structural members. Int. J. Solids and Struct. 1972. 8. No.3. Pp. 297–314.

*Information about the authors*

**Yuriev, Alexander G.** DSc, Professor. E-mail: yuriev\_ag@mail.ru. Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov. Russia, 308012, Belgorod, st. Kostyukova, 46.

**Smolyago, Nina A.** Ph.D., Assistant professor. E-mail: Smoliago@mail.ru. Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov. Russia, 308012, Belgorod, st. Kostyukova, 46.

**Yakovlev, Oleg A.** Senior lecturer. E-mail: yak-oleg@yandex.ru. Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov. Russia, 308012, Belgorod, st. Kostyukova, 46.

---

*Received 10.12.2021*

**Для цитирования:**

Юрьев А.Г., Смоляго Н.А., Яковлев О.А. Перемещения в стержневых системах за пределом упругости // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2022. № 3. С. 25–31. DOI: 10.34031/2071-7318-2021-7-3-25-31

**For citation:**

Yuriev A.G., Smolyago N.A., Yakovlev O.A. Displacements in pivotal systems over elasticity limit. Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov. 2022. No. 3. Pp. 25–31. DOI: 10.34031/2071-7318-2021-7-3-25-31