

*Величко Д.В., доц.,
Магерзут В.З., д-р техн. наук, проф.*

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова

ПОСТРОЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ И СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕССА НАГРЕВА ПЕНОСТЕКЛЬНОЙ ШИХТЫ

tk210@mail.ru

Решаемая задача математического моделирования распределения температурного поля в тигле с пеностеклянной шихтой связана с разработкой автоматизированной системы управления технологическим процессом производства пеностеклянных блоков, обеспечивающей повышение производительности производства и минимизацию процента брака производимой продукции.

Для оптимизации процесса управления необходимо решать как внешнюю, так и внутреннюю задачу теплообмена. Полученные результаты могут использоваться и при выборе алгоритма и при настройке устройства управления температурой в туннельной печи.

Целью данной работы является построение математической модели, описывающей динамические тепловые процессы, происходящие в пеностеклянной шихте при нагреве ее до температуры вспенивания.

В ходе проделанной работы предлагаются различные варианты построения моделей. В-первых, детерминированного типа, позволяющей прогнозировать распределение температурного поля внутри тигля с пеностеклянной шихтой с учетом движения межфазной границы. Во-вторых, стохастического типа, позволяющей отслеживать динамические процессы распределения температуры в разных контрольных точках тигля с пеностеклянной шихтой и на основе этого делать соответствующие выводы относительно начала момента вспенивания.

***Ключевые слова:** детерминированная модель, стохастическая модель, уравнение теплопроводности, эмпирические формулы, пеностеклянная шихта.*

Введение. Целью данной работы является построение математической модели, описывающей динамические тепловые процессы, происходящие в пеностеклянной шихте при нагреве ее до температуры вспенивания. Предлагается вариант, как детерминированной математической модели [1,2], так и стохастической.

Детерминированная математическая модель является наиболее универсальной [3]. В данном случае она строится на основе уравнения теплопроводности [4] в виде дифференциального уравнения в частных производных. В модели данного типа, как правило, заложена глубоко содержательная информация о физических механизмах соответствующих процессов. Данная модель отражает не формальные, а существенные причинно-следственные связи. Недостатком детерминированной модели является ее относительная сложность. Поэтому применение таких моделей для управления объектами становится затруднительно.

В результате экспериментальных исследований натурального образца можно построить стохастическую математическую модель. При этом исследуют лишь реакцию системы на подаваемые на вход возмущения, а результаты обрабатывают методами математической статистики. Часто такие экспериментальные исследования организуют на основе методов планирования эксперимента, получая в результате регрессион-

ные уравнения. Важным достоинством стохастических моделей является их простота и наглядность, что позволяет широко применять такие модели в АСУ ТП.

Основная часть. Строгая постановка подобной задачи приводит к необходимости решения системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с динамическими граничными условиями и подвижными границами раздела фаз.

Пеностеклянная шихта является исходным ингредиентом при порошкообразном способе производства пеностеклянных блоков, которые используются в строительной индустрии в качестве теплоизоляционного материала. В ряде случаев пеностеклянную шихту получают в результате смешения тонкомолотого стекла с пенообразователем. Смесь нагревают до температуры вспенивания. В ходе термообработки происходит окислительно-восстановительная реакция между углеродом и сульфатами (окислителями) и/или оксидами стекла. В результате в расплаве стекла образуются газы, которые придают массе пористую структуру, что приводит к образованию материалов с низкой плотностью и теплопроводностью.

Для проведения теплофизического эксперимента [5] разработана автоматизированная система термического экспресс-анализа, одной из особенностей которой является тигель с ва-

рьюемым объёмом ($60 \times 50 \times 50$ мм – максимальный) и возможностью закрепления в нем датчиков температуры вертикально с помощью огнеупорной вставки. Нумерация термоэлектрических преобразователей (термопар) осуществляется снизу – вверх, расстояние между ними $h \approx 10$ мм.

Кроме этого разработано программное обеспечение на языке высокого уровня, позволяющее получать информацию в режиме реального времени в удобной для оператора форме представления: таблично или графически.

Построение детерминированной модели. Результаты проведения теплофизического эксперимента, в виде температурных кривых нагрева пеностекляной шихты, приведены на рис. 1.

Анализ температурных кривых показывает, что при нагреве шихты фиксируются три после-

довательно расположенных эндотермических эффекта в области температур $\sim 100^\circ\text{C}$, $\sim 620^\circ\text{C}$ и $\sim 860^\circ\text{C}$. Первый соответствует удалению адсорбированной на поверхности частиц влаги, второй обусловлен спеканием шихты, третий вызван вспениванием пеностекла.

На участке 1 (0 – 7 мин) происходит нагревание пеностекляной шихты – исходного материала при производстве пеностекла.

На участке 2 (7 – 10 мин) наблюдается процесс удаления адсорбированной влаги из пеностекляной шихты, поскольку при 100°C происходит испарение воды, находящейся в шихте в «связанном» состоянии. Этот процесс сопровождается поглощением тепла, поэтому температура на этом участке держится практически на одном уровне.

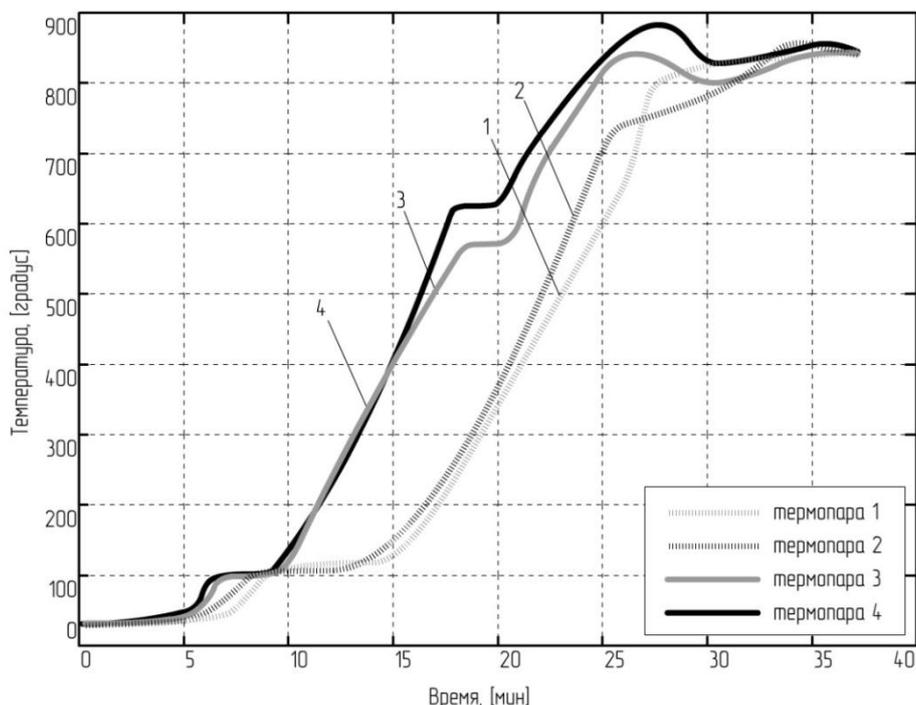


Рис. 1. Температурные кривые нагрева пеностекляной шихты (реакция на температурное возмущение 1000°C)

Участок 3 (10 – 27 мин) отражает процесс спекания пеностекляной шихты. Происходит фазовый переход: порошковая смесь стеклообя и пенообразователя превращается в вязкую массу.

Участок 4 (27 – 35 мин) характеризуется вспениванием. Когда пеностекляная шихта достигает достаточной степени спекания, происходит химическая реакция между пенообразователем и конкретным компонентом стекла. Этот процесс протекает во всех частях образца практически одновременно и сопровождается увеличением его объема. По температуре, при которой начинается реакция, можно сделать вывод, что пенообразователем является углеродный

пенообразователь – сажа (С) – которая вступает во взаимодействие с трёхокисью серы (SO_3). Кроме того, данная окислительно-восстановительная реакция идет с поглощением тепла. После прекращения реакции температура в тигле устанавливается приблизительно на постоянном уровне.

Контроль над каждым из описанных участков важен для получения пеностекла высокого качества.

Процесс удаления адсорбированной влаги можно представить в виде схемы, представленной на рис. 2.

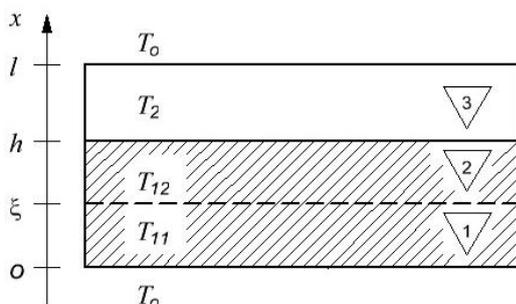


Рис. 2. К постановке задачи о движении межфазной границы

Заштрихованной областью обозначена шихта, не заштрихованной – слой воздуха в тигле с температурой T_2 . В пеностекольной шихте происходит движение межфазной границы ξ – между фазой T_{12} , содержащей влагу, и фазой T_{11} , в которой влага уже испарилась; T_0 – температура печи и тигля, в котором находится шихта.

В каждой из областей 1, 2 и 3 температура подчиняется одномерному уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами, так как зависимость коэффициентов от температуры и координат пренебрежимо мала:

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial t} = \frac{\lambda_{12}}{c'_{12}} \cdot \frac{\partial^2 T_{12}}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial T_{11}}{\partial t} = \frac{\lambda_{11}}{c'_{11}} \cdot \frac{\partial^2 T_{11}}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\lambda_2}{c'_2} \cdot \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Здесь $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_2$ – коэффициенты теплопроводности в 1-й, 2-й и в 3-й областях [$Bm/(m \cdot K)$]; c'_{11}, c'_{12}, c'_2 – удельная объемная теплоемкость материала в 1-й, 2-й и в 3-й областях [$Dж/(m^3 \cdot K)$].

Граничные условия при $x=0$ и $x=l$ описываются граничным условием 3-го рода (законом Ньютона):

$$\lambda_{11} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha_1 (T_{11}|_{x=0} - T_0) \text{ и}$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=l} = \alpha_2 (T_0 - T_2|_{x=l}), \quad (2)$$

где α_1 и α_2 – коэффициенты теплоотдачи на одной и другой границах соответственно [$Bm/(m^2 \cdot K)$].

На границе областей 2 и 3 наблюдается равенство температур, поэтому граничное условие будет выглядеть следующим образом

$$T_{12}|_{x=h} = T_2|_{x=h}. \quad (3)$$

И, наконец, на границе областей 1 и 2 должно наблюдаться равенство потоков тепла. Причем температура при $x = \xi$ должна равняться температуре фазового перехода, то есть

$$T_{12}|_{x=\xi} = T_{11}|_{x=\xi} = 100 \text{ } ^\circ\text{C}. \quad (4)$$

Поток, подводимый к межфазной границе, равен $\lambda_{11} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} \Big|_{x=\xi}$. Одна часть этого теплового

потока идет на испарение в слое толщиной $d\xi$, а другая отводится в виде потока $\lambda_{12} \frac{\partial T_{12}}{\partial x} \Big|_{x=\xi}$.

Граничное условие будет выглядеть следующим образом

$$\lambda_{11} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} \Big|_{x=\xi} - \lambda_{12} \frac{\partial T_{12}}{\partial x} \Big|_{x=\xi} = \rho_u \frac{d\xi}{dt}, \quad (5)$$

где ρ_u – удельная (объемная) теплота фазового превращения (в данном случае испарения), $Dж/м^3$.

Процесс спекания представляется такой же системой дифференциальных уравнений, что и процесс дегидратации, отличие заключается лишь в том, что фазовый переход происходит между высушенным пеностекольным порошком с λ_{11} и c'_{11} и вязкой массой с λ_{12} и c'_{12} , при $x = \xi$ температура будет порядка $600 \text{ } ^\circ\text{C}$ (по свойствам пеностекольной шихты) и необходимо будет ввести ρ_n – удельную теплоту спекания.

Химическую реакцию, характеризующую процесс вспенивания (участок 4), представим в виде отрицательного источника тепла $q(t)$, который опишем функцией

$$q(t) = -A(t-t_0)^B e^{-C(t-t_0)}, \quad (6)$$

где A, B и C – коэффициенты, определяющие характер протекания реакции, t_0 – время начала химической реакции, знак минус перед формулой отражает факт поглощения тепла (рис. 3).

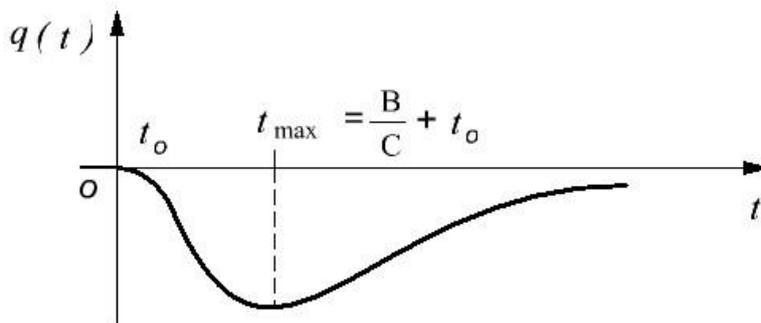


Рис. 3. График функции $q(t)$

Выбор данной функции обусловлен тем, что она обладает свойствами, схожими с характером изменения температуры шихты на участке 4 (рис.1).

Дифференциальное уравнение в этом случае приобретает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c'} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q(t), \quad (7)$$

где T – температура как функция времени и координаты, c' – удельная объемная теплоемкость вязкой массы [Дж/(м³·К)], λ – коэффициент теплопроводности [Вт/(м·К)].

Решение полученной системы уравнений осуществляется численным методом сеток [6].

Построение стохастической модели. При обработке экспериментальных данных часто возникает задача построения эмпирических формул. Решение данной задачи состоит из двух этапов. Во-первых, выбирается общий вид эмпирической формулы и во-вторых, определяются ее параметры. Одно из основных требований предъявляемое к эмпирическим формулам – простота. Наиболее распространенным на практике методом определения параметров эмпирических формул является метод наименьших квадратов [6,7].

В нашем случае наиболее приемлемой является параболическая функция:

$$F(t, a, b, c) = at^2 + bt + c. \quad (8)$$

Для построения аппроксимирующей функции необходимо подобрать коэффициенты так, чтобы величина меры отклонения

$$S = \sum_{i=1}^n [T_i - F(t_i)]^2$$

была наименьшей. Задача

минимизации сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (T_i - at_i^2 - bt_i - c) t_i^2 = 0, \\ \sum_{i=1}^n (T_i - at_i^2 - bt_i - c) t_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n (T_i - at_i^2 - bt_i - c) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

После преобразований

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n t_i^4 + b \sum_{i=1}^n t_i^3 + c \sum_{i=1}^n t_i^2 = \sum_{i=1}^n t_i^2 T_i, \\ a \sum_{i=1}^n t_i^3 + b \sum_{i=1}^n t_i^2 + c \sum_{i=1}^n t_i = \sum_{i=1}^n t_i T_i, \\ a \sum_{i=1}^n t_i^2 + b \sum_{i=1}^n t_i + c n = \sum_{i=1}^n T_i. \end{cases} \quad (10)$$

Решением этой системы являются параметры a, b, c аппроксимирующей функции. Для оценки точности аппроксимации применяется параметр – среднеквадратичное отклонение (СКО):

$$\bar{\Delta} = \sqrt{S/n}, \quad (11)$$

где S – мера отклонения, а n – количество экспериментальных исследований.

Для экспериментальных данных, полученных с помощью автоматизированной системы термического экспресс-анализа можно построить эмпирические формулы, определяющие динамические процессы распределения температуры в разных контрольных точках тигля с пено-стекольной шихтой.

Нижеприведенная модель строилась на основе выборки данных, представленных в табл. 1.

Таблица 1

Выборка экспериментальных данных для построения эмпирических формул

термопара 1											
$t_i, \text{ мин}$	14,21	16,4	18,31	20,5	22,41	25	26,53	27	28,45	29,1	29,3
$T_i, \text{ }^\circ\text{C}$	136,4	205,9	284,9	415,8	514,2	621,3	735,2	743,5	788,2	794,8	799,8
термопара 2											
$t_i, \text{ мин}$	14,21	16,4	18,31	20,5	22,41	25	26,53	27	28,45	29,1	29,3
$T_i, \text{ }^\circ\text{C}$	144,6	222,9	309,4	451,6	555,2	691,4	748	749,9	774,4	780,4	784,6
термопара 3											
$t_i, \text{ мин}$	14,21	16,4	18,31	20,5	22,41	25	26,53	27	28,45	29,1	29,3
$T_i, \text{ }^\circ\text{C}$	309,3	443,4	534	652,6	724,9	799,9	828,2	828,1	804,8	799,8	798,9
термопара 4											
$t_i, \text{ мин}$	14,21	16,4	18,31	20,5	22,41	25	26,53	27	28,45	29,1	29,3
$T_i, \text{ }^\circ\text{C}$	387,5	512	591,1	694,5	754,3	819,4	853,8	855,7	858,6	847	837,9

Данный временной диапазон соответствует стадиям спекания и вспенивания шихты. При необходимости построения распределения температурного поля выборку данных в разных

$$T(t) = -0,2t^2 + 55,9t - 642, \text{ СКО } \bar{\Delta} \approx 20^\circ\text{C} \text{ (термопара 1),} \quad (12)$$

$$T(t) = -1,1t^2 + 96,3t - 1026, \text{ СКО } \bar{\Delta} \approx 24^\circ\text{C} \text{ (термопара 2),} \quad (13)$$

$$T(t) = -2,7t^2 + 152,1t - 1319,5, \text{ СКО } \bar{\Delta} \approx 13^\circ\text{C} \text{ (термопара 3),} \quad (14)$$

$$T(t) = -2,15t^2 + 124,65t - 957,4, \text{ СКО } \bar{\Delta} \approx 9^\circ\text{C} \text{ (термопара 4).} \quad (15)$$

Проверка качества аппроксимации осуществляется путем сопоставления значений функций и экспериментальных данных.

В дальнейшем, решив уравнение $dT/dt = 0$ можно определить момент начала вспенивания пеностекольной шихты. В данном случае $t_{всп} \approx 28 \text{ мин.}$

Выводы. В ходе математического моделирования тепловых процессов в пеностекольной шихте, во-первых, предложен вариант построения модели детерминированного типа, позволяющей прогнозировать распределение температурного поля внутри тигля с пеностекольной шихтой с учетом движения межфазной границы. Во-вторых, предложен вариант построения модели стохастического типа, позволяющей отслеживать динамические процессы распределения температуры в разных контрольных точках тигля с пеностекольной шихтой и на основе этого определять начало момента вспенивания. Данный фактор, безусловно, влияет на длительность стадии вспенивания, что является важным параметром в технологии производства пеностекольных блоков [8,9], от которого зависит качество и объем выпускаемой продукции.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Величко Д.В., Рубанов В.Г., Магергут В.З. Об одном подходе к построению математической модели процессов тепловлагопереноса при нагреве пеностекольной шихты // Научные технологии и инновации: сб. тр. XXI Между-

контрольных точках стоит делать для одних и тех же моментов времени.

В результате, после обработке данных, получим:

дународ. науч.-практич. конф., (Белгород, 9-10 окт. 2014), Белгород: Изд-во БГТУ, 2014. С.133-137.

2. Величко Д.В., В.Г. Рубанов. Математическое моделирование теплотехнологических процессов с межфазным переходом // Математические методы в технике и технологиях: сб. тр. XXI Международ. науч. конф., (Саратов, 27-30 мая 2008 г.), Саратов: Изд-во СГТУ, 2008. Т.3. С.53-55.

3. Арутюнов В.А., Бухмиров В.В., Крупеников С.А. Математическое моделирование тепловой работы промышленных печей. М.: Металлургия, 1990. 239 с.

4. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высш. шк., 1967. 600 с.

5. Ковальногов Н.Н., Лукин Н.М. Теория и техника теплофизического эксперимента: Текст лекций. Ульяновск: УлГТУ, 1999. 196 с.

6. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. 368 с.

7. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 544 с.

8. Демидович Б.К. Пеностекло. Мн.: Наука и техника, 1975. 248 с.

9. Шилл Ф. Пеностекло (производство и применение): Пер. с чешск. М.: Стройиздат, 1965. 308 с.