МЕХАНИЧЕСКОЕ ОБОРУДОВАНИЕ И МАШИНОСТРОЕНИЕ

Осипова Т. Н., магистр, ассистент
Украинская инженерно-педагогическая академия

УЧЕТ МАССЫ КАНАТОВ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ДИНАМИКИ ОДНОКОНЦЕВОГО ПОДЪЕМНИКА

tanya_338@mail.ru

В статье рассмотрена динамики одноконцевого подъемника с учетом потенциальной энергии системы, состоящей из потенциальной энергии в поле силы тяжести элементов подъемника и упругой деформации струны и отвеса каната. На основе уравнения Лагранжа II-го рода получена система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для определения колебательных процессов подъемника.

Ключевые слова:*одноконцевой подъемник, динамика, потенциальная и кинетическая энергии, обобщенные координаты, система дифференциальных уравнении*

Одноконцевой подъемник относится к системе статически неуравновешенного подъема, поэтому важно знать какие колебательные процессы возникают в канатопроводе данной подъемной установки. В работе проф. Дворникова В.И. [1] отмечается, что в литературе [2 – 4] при расчете подъемников канат считается невесомым, тогда 1/3 его массы приводится к рядом лежащим дискретным массам. Но куда делась еще 1/3 массы каната? Необходимо рассмотреть динамические переходные процессы в одноконцевой подъемной установке, учитывая массу струны и отвеса каната, а также характер движения дискретных масс.

На рис. 1 приведена схема одноконцевой подъемной установки, которая состоит из электродвигателя, редуктора, соединительных муфт, подъемного барабана, которые объединены в одну дискретную массу в виду большой жесткости валопровода; копрового шкива, подъемного сосуда и каната.

Выведем динамические уравнение движения рассматриваемого подъемника с учетом потенциальной энергии канатов, используя метод Лагранжа.

Упругое удлинение струны и отвеса каната

$$\delta l_1 = R_ш \varphi_ш - R_б \varphi_б\,;\;\; \delta l_2 = y - R_ш \varphi_ш\,, \quad (1)$$

где $R_б$, $R_ш$ – радиусы соответственно барабана и копрового шкива; $\varphi_б$, $\varphi_ш$ – углы поворота соответственно барабана и копрового шкива, отсчитываемые против хода часовой стрелки.

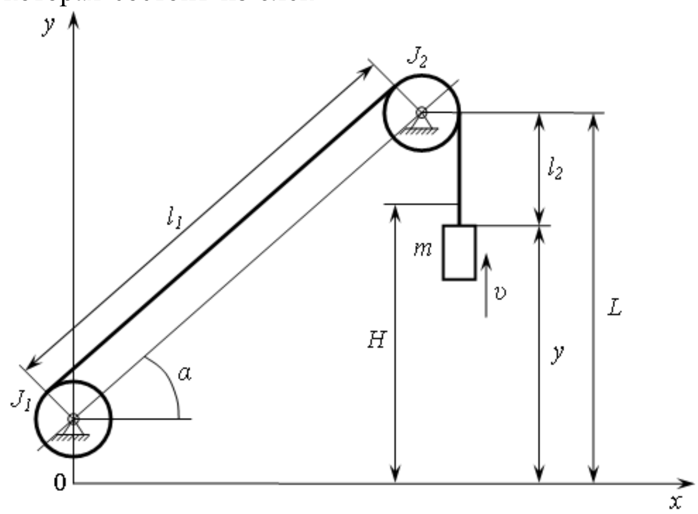

Рис. 1. Схема одноконцевой подъемной установки:
J_1 – приведенный суммарный момент инерции барабана машины; J_2 – момент инерции направляющего (копрового) шкива; l_1 – длина наклонной струны каната; l_2 – переменная длина отвесной части каната; α– угол наклона струны; m – масса концевого груза; v – скорость подъема груза, указывающая направление перемещений элементов системы; y – перемещение прицепного устройства по вертикали;
L – начальная длина отвеса каната в момент пуска двигателя; H – высота подъема

Потенциальная энергия системы, которая возникает от сил упругой деформации канатов

$$\Pi_{упр} = \frac{C_{стр}\cdot(\delta l_1)^2}{2} + \frac{C_{отв}\cdot(\delta l_2)^2}{2}, \quad (2)$$

где $C_{стр}$, $C_{отв}$– коэффициенты жесткости соответственно струны и отвеса каната, определяемые следующим образом:

$$C_{стр} = \frac{E\overline{a}d_к^2}{l_1}; C_{отв} = \frac{E\overline{a}d_к^2}{l_2}, \quad (3)$$

где$E = 2{,}06\cdot10^{11}$ Н/м^2 – модуль упругости стали проволоки; $\overline{a}$ = 0,315 – безразмерный параметр, зависящий от конструкции каната;$d_к$ – диаметр каната

В формуле (3) в соответствии с рис. 1 $l_2 = L - y$, но $C_{отв}$по своему физическому смыслу зависит не от координаты y, а от его «среднего значения» $\overline{y}(t)$, определяемого как средняя величина по времени t при перемещении груза

$$l_2 = L - \overline{y}(t). \quad (4)$$

Определим массы струны и отвеса каната по формулам

$$m_{стр} = \gamma l_1; m_{отв} = \gamma l_2, \quad (5)$$

где γ – масса единицы длины каната, определяемая как

$$\gamma = \overline{\gamma}\cdot\gamma_{ст}\cdot d_к^2, \quad (6)$$

где $\overline{\gamma}$ = 0,491 – безразмерный параметр, зависящий от конструкции каната;$\gamma_{ст}$ = 7800 кг/м^3 – плотность стали, из которой изготовлена проволока.

Из всех сосредоточенных масс только концевая масса изменяет свою потенциальную энергию в поле силы тяжести. Изменяется также потенциальная энергия отрезков струны и отвеса каната. Координаты центров инерции струны и отвеса каната определяются как средние арифметические величины этих канатов и располагаются в окресности их середин:

$$s_{стр} = \frac{R_ш\varphi_ш + R_б\varphi_б}{2}; s_{отв} = \frac{y - R_ш\varphi_ш}{2}. \quad (7)$$

Для инженерных целей точностью в качестве первого приближения можно ограничиться формулами (7).

Потенциальная энергия в поле силы тяжести равна

$$\Pi_{тяж} = myg - \frac{\gamma l_1 g\cdot(R_ш\varphi_ш + R_б\varphi_б)\cdot\sin\alpha}{2} + \frac{\gamma l_2 g\cdot(y + R_ш\varphi_ш)}{2}, \quad (8)$$

где g – ускорение свободного падения.

Общая потенциальная энергия системы равна

$$\Pi = \Pi_{упр} + \Pi_{тяж}. \quad (9)$$

Подставив в уравнение (9) соотношения (2) и (8) с определениями (3) и (4), получим окончательное выражение:

$$\Pi = \frac{C_{стр}\cdot(R_ш\varphi_ш - R_б\varphi_б)^2}{2} + \frac{C_{отв}\cdot(y - R_ш\varphi_ш)^2}{2} + \left(m + \frac{\gamma l_1}{2}\right)g\cdot y + \frac{y\cdot g\cdot R_ш\varphi_ш\cdot(l_2 - l_1\cdot\sin\alpha)}{2} - \frac{y\cdot g\cdot l_1\cdot R_б\varphi_б\cdot\sin\alpha}{2}. \quad (10)$$

Определяем кинетическую энергию рассматриваемой системы, которая представляет собой сумму кинетических энергий двух вращающихся масс (барабана и копрового шкива) и линейно перемещающихся масс концевого груза и каната.

Момент инерции барабана является переменной величиной от параметра $\varphi_б$, так как к его вращающейся массе присоединяем массу части каната, навиваемую на барабан. Получаем

$$J_1' = J_1 + \gamma R_б^3\varphi_б \text{ или } J_1' = J_1 + \gamma R_б^3\overline{\varphi}_б(t), \quad (11)$$

где$\overline{\varphi}_б(t)$ – среднее значение, определяемое как средняя интегральная величина по времени t при вращении барабана.

Следовательно, переменная J_1' рассматривается как параметрическая функция времени t.

Определим кинетическую энергию элементов подъемника.

Струну и отвес каната считаем упругими стержнями, концы которых перемещаются, и представим их сосредоточенными массами в их центрах тяжести. Предположим, что скорости граничных точек струны и отвеса каната являются соответственно $R_б\dot{\varphi}_б$, $R_ш\dot{\varphi}_ш$ и $R_ш\dot{\varphi}_ш$, $\dot{y}$.

Скорости центров инерции отрезков равны

$$\upsilon_{стр} = \frac{R_б\dot{\varphi}_б + R_ш\dot{\varphi}_ш}{2} \text{ и } \upsilon_{отв} = \frac{R_ш\dot{\varphi}_ш + \dot{y}}{2}. \quad (12)$$

Соотношения (12) отражают гипотезу и среднеарифметической величине продольной скорости центров тяжести.

Кинетическая энергия всей системы равна

$$T = \frac{J_1'\dot{\varphi}_б^2}{2} + \frac{J_2'\dot{\varphi}_ш^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{\gamma l_1\cdot(R_б\dot{\varphi}_б + R_ш\dot{\varphi}_ш)^2}{8} + \frac{\gamma l_2\cdot(R_ш\dot{\varphi}_ш + \dot{y})^2}{8}. \quad (13)$$

Для определения уравнений движения элементов рассматриваемой системы, воспользуемся уравнением Лагранжа II-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_i}\right)+\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}=Q_i(t), \qquad (14)$$

где $q_1 = \varphi_б$, $q_2 = \varphi_ш$, $q_3 = y$ – обобщенные координаты элементов подъемника; $\dot{q}_1 = \dot{\varphi}_б$, $\dot{q}_2 = \dot{\varphi}_ш$, $\dot{q}_3 = \dot{y}$ – обобщенные скорости элементов рассматриваемой системы; Q_1, Q_2, Q_3 – обобщенные непотенциальные силы.

Для рассматриваемой системы примем: $Q_1 = M_{дв}(t)$, $Q_2 = 0$, $Q_3 = 0$, где $M_{дв}(t)$ – развиваемый момент двигателя, приведенный к оси органа навивки. Обобщенные силы Q_2, Q_3 приняты равными нулю, так как предполагается, что копровой шкив и концевой груз не подвержены воздействию внешних сил (силы сопротивления воздушной среды, трения в подшипниковых узлах и в направляющих устройствах и др.), кроме уже учтенных.

Проведя необходимые вычисления и преобразования, получим систему уравнений движения подъемника:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(J_1' + \frac{\gamma l_1 R_б^2}{4}\right)\ddot{\varphi}_б + \frac{\gamma l_1 R_б R_ш}{4}\ddot{\varphi}_ш - C_{стр} R_б\left(R_ш\varphi_ш - R_б\varphi_б\right) = M_{дв} + \frac{\gamma l_1 g R_б \sin\alpha}{2};\\
&\left(J_2 + \left(\frac{\gamma l_1}{4} + \frac{\gamma l_2}{4}\right)R_ш^2\right)\ddot{\varphi}_ш + \frac{\gamma l_1 R_б R_ш}{4}\ddot{\varphi}_б + \frac{\gamma l_2 R_ш}{4}\ddot{y} +\\
&+ C_{стр} R_ш\left(R_ш\varphi_ш - R_б\varphi_б\right) - C_{отв} R_ш\left(y - R_ш\varphi_ш\right) = -\frac{\gamma g R_ш\left(l_2 - l_1\sin\alpha\right)}{2};\\
&\left(m + \frac{\gamma l_2}{4}\right)\ddot{y} + \frac{\gamma l_2 R_ш}{4}\ddot{\varphi}_ш + C_{отв}\left(y - R_ш\varphi_ш\right) = -\left(m + \frac{\gamma l_2}{2}\right)g.
\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Таким образом, получена система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для определения колебательного движения элементов подъемника с учетом потенциальной энергии канатов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1.Шахтный подъем: Научно-производственное издание / Бежок В.Р., Двор-ников В.И., Манец И.Г., Пристром В.А.; общ.ред. Б.А. Грядущий, В.А. Корсун. – Донецк: ООО «Юго-Восток Лтд», 2007. 624 с.

2. СтреттДж.В. /Лорд Рэлей/ Теория звука. М.: Гостехиздат, 1955. 318 с.

3. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1959. 439 с.

4. Степанов А.Г. Динамика шахтных подъёмных установок. – Пермь: УрО РАН, 1994. 263 с.