

Смирнов Д.В., аспирант,
 Семикопенко И.А., канд. техн. наук, проф.,
 Воронов В.П., канд. физ.-мат. наук, проф.

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ СРЕДЫ В КРИВОЛИНЕЙНОМ ПАТРУБКЕ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

DmSm1989@yandex.ru

Дано математическое описание движения вязкой среды в криволинейном патрубке круглого поперечного сечения в полярной системе координат. Определены проекции вектора скорости воздушного потока на оси полярной системы координат. Построены графические зависимости изменения начального значения u_0 скорости воздушной среды на входе в криволинейный патрубок в зависимости от изменения его конструктивных параметров.

Ключевые слова: вязкая среда, криволинейный патрубок, воздушный поток.

Рассмотрим движение вязкой среды, предположив, что вязкость и плотность постоянны.

В этом случае движение вязкой среды в криволинейном патрубке можно описать в рамках уравнения Навье-Стокса [1]:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\text{grad}P + \mu \Delta \vec{u} + \rho \vec{g}, \quad (1)$$

где ρ – плотность воздуха; μ – динамическая вязкость запыленного воздуха; g – ускорение свободного падения; \vec{u} – вектор скорости воздушного потока; P – давление внутри криволинейного патрубка; Δ – оператор Лапласа.

Для описания движения воздушной среды внутри криволинейного патрубка введем полярную систему координат r, φ с центром в точке «O» (рис. 1).

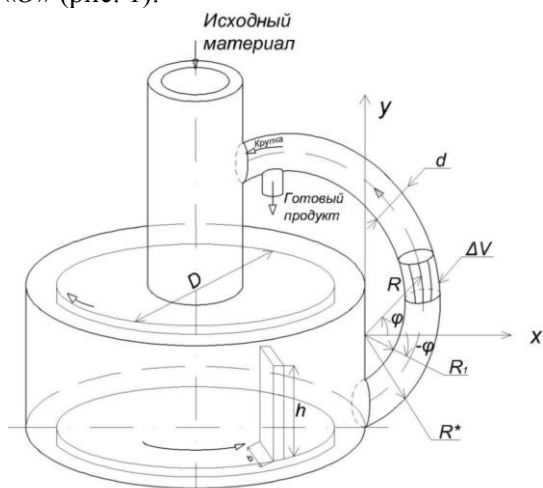


Рис. 1. Расчетная схема для описания движения двухфазной среды в криволинейном патрубке круглого поперечного сечения

При этом радиальная координата изменяется в пределах $R_1 \leq r \leq R_2$. Запишем проекции уравнения (1) на оси полярной системы координат:

$$\rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] + \rho g_r, \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r u_\varphi}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\varphi) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right] + \rho g_\varphi, \quad (3)$$

где u_r, u_φ – проекции вектора скорости воздушного потока на оси полярной системы координат; g_r, g_φ – проекции вектора свободного ускорения на оси полярной системы координат.

Для установившегося стационарного движения воздушной среды в криволинейном патрубке с постоянным радиусом кривизны

$$R = R + d/2. \quad (4)$$

где d – диаметр поперечного сечения криволинейного патрубка.

Выделим в криволинейном патрубке некоторый объем воздушной среды ΔV . Величина давления выделенного объема включает динамическую и статическую составляющие:

$$P = P_{\text{дин}} + P_{\text{стат}}, \quad (5)$$

где $P_{\text{дин}}$ – динамическая составляющая давления, равная [2]:

$$P_{\text{дин}} = \frac{\rho}{2} u_\varphi^2, \quad (6)$$

здесь u_φ – тангенциальная скорость движения воздушного потока в криволинейном патрубке,

$$P_{\text{стат}} = \rho g y, \quad (7)$$

где, согласно расчетной схеме на рисунке 1

$$y = R + R \sin \varphi = R(1 + \sin \varphi), \quad (8)$$

здесь угол φ – угол, отсчитываемый от положительного направления оси «ox».

С учетом (8) соотношение (7) принимает вид:

$$P_{\text{стат}} = \rho g R(1 + \sin \varphi). \quad (9)$$

С учетом (6) и (9) выражение (5) принимает вид:

$$P = \frac{\rho}{2} u_\varphi^2 + \rho g R(1 + \sin \varphi). \quad (10)$$

Пренебрегая массовыми силами и изменением скорости воздушного потока в радиальном направлении ($u_r = 0$), на основании сделанных предположений уравнениям (2) и (3) с учетом (10) можно придать вид:

$$\frac{\rho}{R} u_\varphi^2 = \frac{2\mu}{R^2} \cdot \frac{du_\varphi}{d\varphi}, \quad (11)$$

$$\frac{\rho u_\varphi}{R} \cdot \frac{du_\varphi}{d\varphi} = -\frac{\rho}{R} u_\varphi \frac{du_\varphi}{d\varphi} - \frac{d}{d\varphi} (\rho g(1 + \sin \varphi)) + \frac{\mu}{R^2} \frac{d^2 u_\varphi}{d\varphi^2}. \quad (12)$$

После несложных математических преобразований (12) принимает следующий вид:

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\varphi} (u_\varphi^2) = -\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\varphi} (u_\varphi^2) - 2\rho g \frac{d}{d\varphi} (1 + \sin \varphi) + \frac{2\mu}{R^2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{du_\varphi}{d\varphi} \right) \quad (13)$$

Интегрирование (13) приводит к результату:

$$\frac{\rho}{R} u_\varphi^2 = -\frac{\rho}{R} u_\varphi^2 - 2\rho g(1 + \sin \varphi) + \frac{2\mu}{R^2} \cdot \frac{du_\varphi}{d\varphi} + c_1. \quad (14)$$

С учетом (11) выражение (14) будет иметь вид:

$$-\frac{\rho}{R} u_\varphi^2 - 2\rho g(1 + \sin \varphi) + c_1 = 0. \quad (15)$$

Постоянную интегрирования в (15) можно найти исходя из начального условия:

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}, u_\varphi = u_0, \quad (16)$$

где u_0 – начальное значение скорости движения воздушного потока в начале криволинейного патрубка, которое с расходом воздуха Q в патрубке связано соотношением:

$$u_0 = \frac{4Q}{\pi d^2}, \quad (17)$$

здесь d – диаметр поперечного сечения криволинейного патрубка, а согласно [3]

$$Q = \pi D b \sin \alpha \sqrt{\frac{2(\Delta p - \Delta p_m)}{\rho}}, \quad (18)$$

где D – наружный диаметр описанной окружности ударных элементов мельницы; b – ширина ударных элементов; α – угол между направлениями абсолютной и окружной скоростей, равный

$$\alpha = \arctg \frac{u_1}{u}, \quad (19)$$

здесь

$$u_1 = \omega h \sqrt{\frac{D}{h} - 1}, \quad (20)$$

где h – высота ударных элементов; u_1 – скорость схода воздуха с ударных элементов внешнего ряда; ΔP_m – потери давления в системе,

$$u = \sqrt{u_1^2 + u_t^2}, \quad (21)$$

$$u_t = \frac{\omega D}{2}, \quad (22)$$

$$\Delta p = u^2 \frac{\rho}{2} \cdot [4] \quad (23)$$

Если учесть, что

$$\sin \alpha = \frac{tg \alpha}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha}}, \quad (24)$$

а на основании соотношений (19) – (21) находим:

$$tg \alpha = \frac{h}{D} \cdot \frac{\sqrt{\frac{D}{h} - 1}}{\sqrt{1 + \frac{h}{D} \frac{h^2}{D^2}}}. \quad (25)$$

Подстановка (25) в (24) приводит к следующему соотношению:

$$\sin \alpha = \frac{h}{D} \cdot \frac{\sqrt{\frac{D}{h} - 1}}{\sqrt{1 + \frac{2h}{D} \frac{2h^2}{D^2}}}. \quad (26)$$

Без учета потерь давления ($\Delta P_m = 0$) подстановка соотношений (23) и (26) позволяет (18) привести к следующему виду:

$$Q = \frac{\pi \omega b D h \sqrt{\frac{D}{h} - 1} \sqrt{1 + 4 \frac{h}{D} - 4 \frac{h^2}{D^2}}}{\sqrt{1 + 8 \frac{h}{D} - 8 \frac{h^2}{D^2}}}. \quad (27)$$

Подстановка (27) в (17) приводит к следующему результату:

$$u_0 = 4\omega b \frac{D^2}{d^2} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{4h}{D} - \frac{4h^2}{D^2}} \sqrt{\frac{h}{D} \frac{h^2}{D^2}}}{\sqrt{1 + \frac{8h}{D} - \frac{8h^2}{D^2}}}. \quad (28)$$

В силу того, что конструктивные параметры мельницы могут варьироваться в следующих пределах: $h = 0,05 \dots 0,1$ м; $D = 0,3 \dots 0,4$ м, поэтому отношение конструктивных параметров $\frac{h}{D}$ можно считать малой величиной первого порядка малости. Пренебрегая в (28) величинами второго порядка малости, формулу (28) можно существенно упростить.

Данное математическое преобразование приводит к следующему результату:

$$u_0 \approx 4\omega b \frac{D^2}{d^2} \sqrt{\frac{h}{D} \left(1 + 8 \frac{h}{D}\right)^{-\frac{1}{2}}} \approx 4\omega b \frac{D^2}{d^2} \sqrt{\frac{h}{D} \left(1 - 4 \frac{h}{D}\right)}. \quad (29)$$

Применив (16) к соотношению (15), найдем следующее значение постоянной интегрирования:

$$C_1 = \frac{\rho}{R} u_0^2. \quad (30)$$

С учетом (30) (15) принимает вид:

$$u_\varphi = \sqrt{u_0^2 - 2Rg(1 + \sin \varphi)}. \quad (31)$$

На рисунке 2 представлена зависимость изменения скорости воздушного потока в криволинейном патрубке мельницы при изменении углового размера, движущегося выделенного объема воздушной среды, выраженного в радианах. Анализ приведенной зависимости показывает, что при изменении углового размера φ в пределах от 0 до 1,5 радиана изменение скорости воздушного потока происходит примерно в 2 раза.

На рисунках 3...6 приведены графики изменения начального значения u_0 скорости воздушной среды на входе в криволинейный патрубок в зависимости от изменения конструктивных параметров криволинейного патрубка. Анализ полученных зависимостей показывает, что увеличение таких конструктивных параметров, как наружный диаметр ударных элементов в камере помола, высота и ширина ударных

элементов способствуют увеличению скорости u_0 на входе в криволинейный патрубок, а увеличение диаметра патрубка возврата приводит к уменьшению величины начальной скорости воздушного потока на входе в патрубок.

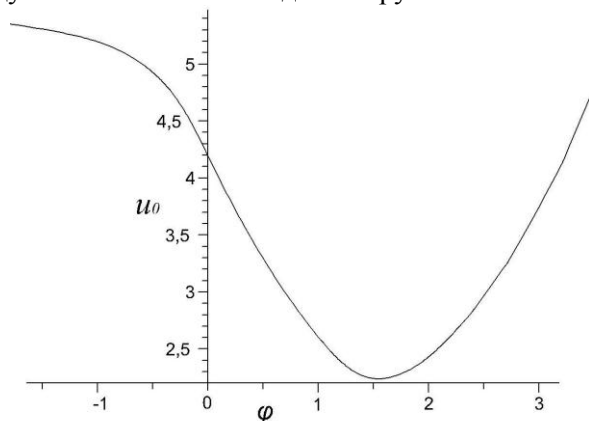


Рис. 2. График изменения скорости воздушной среды в криволинейном патрубке для начального значения скорости на входе $u_0 = 5,45$ м/с. Кривая отвечает значению параметров $R_1 = 0,58$ метра, $d = 0,09$ метра

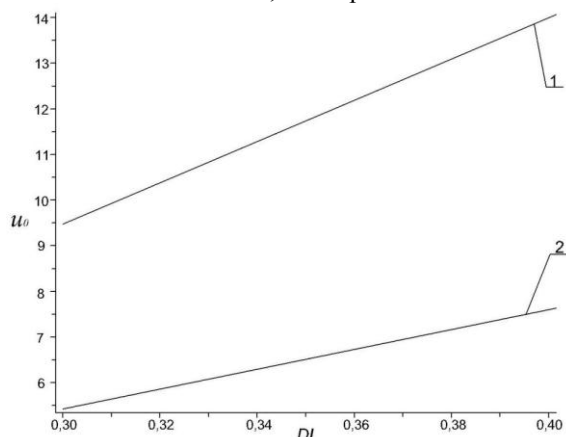


Рис. 3. График изменения начального значения u_0 скорости воздушной среды в патрубке возврата при изменении наружного диаметра диска. 1-я кривая отвечает значению частоты вращения дисков $\omega = 25$ 1/с, а 2-я кривая – $\omega = 15$ 1/с.

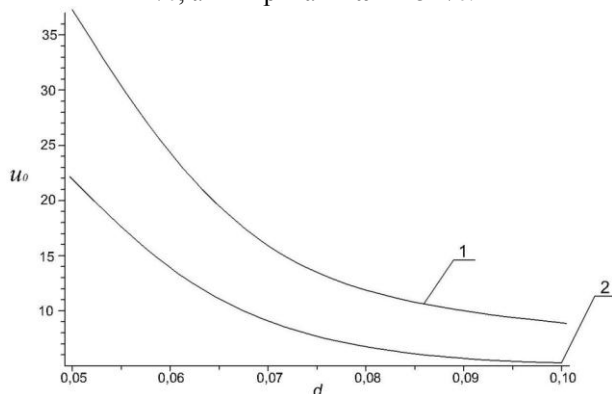


Рис. 4. График изменения начального значения u_0 скорости воздушной среды в патрубке возврата при изменении размера его диаметра. 1-я кривая отвечает

значению частоты вращения дисков $\omega = 50$ 1/с, а 2-я кривая – $\omega = 25$ 1/с

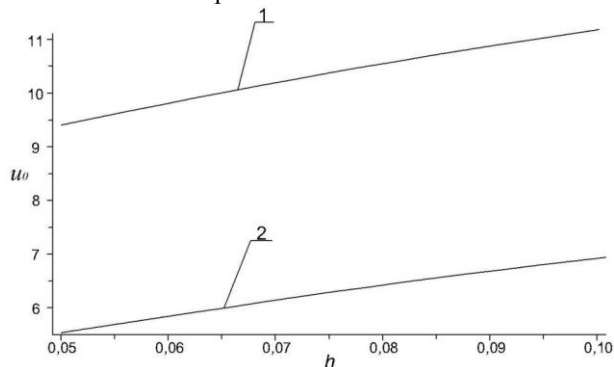


Рис. 5. График изменения начального значения u_0 скорости воздушной среды в патрубке возврата при изменении размера высоты ударных элементов. 1-я кривая отвечает значению частоты вращения дисков $\omega = 25$ 1/с, а 2-я кривая – $\omega = 15$ 1/с

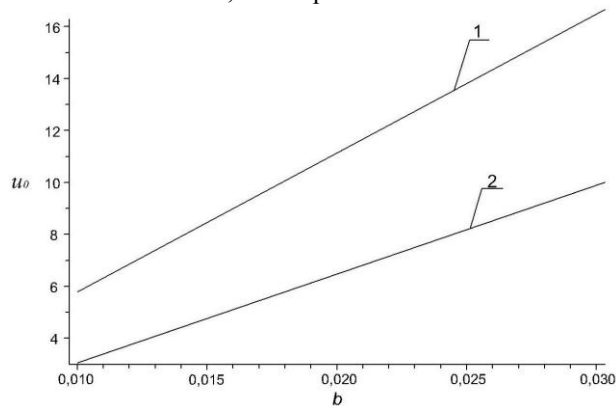


Рис. 6. График изменения начального значения u_0 скорости воздушной среды в патрубке возврата при изменении размера ширины ударных элементов. 1-я кривая отвечает значению частоты вращения дисков $\omega = 50$ 1/с, а 2-я кривая – $\omega = 25$ 1/с.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Слёзкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гос. издательство технико-теоретической литературы, 1955. 521 с.
2. Кухлинг Х. Справочник по физике. М.: Мир, 1982. 520 с.
3. Клочков Н.В., Блиничев В.Н., Бобков С.П., Пискунов А.В. Методика расчета расхода воздуха в центробежно-ударной мельнице // Известия вузов. Химия и химическая технология. 1982. №2. С. 230-232.
4. Семикопенко И.А., Вялых С.В., Жуков А.А. Агрегат дезинтеграторного типа с внутренней классификацией материала // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2013. №3. С.74-76.