

DOI: 10.34031/article_5ca1f6356f67c4.15287599

¹Бондаренко Ю.А., ¹Ханин С.И., ^{2,*}Бестужева О.В.¹Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова
Россия, 308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46²Белгородский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

*E-mail: bestuzheva@bsu.edu.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЦАПФЫ ШАРОВОЙ МЕЛЬНИЦЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ И ВРАЩЕНИЯ

Аннотация. В статье рассматривается цапфа шаровой мельницы под действием постоянных нагрузок корпуса с мелющими телами и материалом, одновременным действием силы тяжести и вращения за счет момента внешних сил. При эксплуатации шаровой мельницы опасным сечением днищ является место перехода цилиндрической части цапфы в коническую. Оценено напряженно-деформированное состояние цапфы шаровой мельницы производится на основе математической модели, включающей в себя полную систему уравнений равновесия, определяющих соотношений упруго-пластического деформирования, учитывающих эффекты циклического нагружения материала, с соответствующими начальными и граничными условиями. Учтена динамическая нагрузка, возникающая при вращении, по принципу Даламбера, согласно которому ко всем действующим внешним силам добавляются силы инерции. Получено уравнение изгиба оси цапфы, учитывающее действие сил инерции. Получены зависимости прогиба, кривизны прогиба и напряжения от продольной координаты при действии силы тяжести и вращения на ось цапфы. Определена величина касательного напряжения от действия крутящего момента. Определено общее выражение эквивалентного напряжения, учитывающее сложное напряженно-деформированное состояние цапфы шаровой мельницы, испытывающей растягивающее напряжение от изгибающих нагрузок и сдвиговое напряжение от крутящего момента.

Ключевые слова: цапфа шаровой мельницы, износ оборудования, математическое описание, напряженно-деформированное состояние, изгиб вращающейся цапфы.

Введение. При эксплуатации шаровой мельницы опасным сечением днищ является место перехода цилиндрической части цапфы в коническую [1, 2]. Под действием постоянных нагрузок корпуса с мелющими телами и материалом, одновременным действием силы тяжести и вращения за счет момента внешних сил возникает изгиб [3].

Цапфа имеет форму полого цилиндра, который защемлен на конце и вращается вокруг продольной оси [4]. Оценка напряженно-деформированного состояния цапфы шаровой мельницы производится на основе математической модели, включающей в себя полную систему уравнений равновесия, определяющих соотношений упруго-пластического деформирования, учитывающих эффекты циклического нагружения материала, с соответствующими начальными и граничными условиями.

Методология. Согласно работам [5, 6, 7], в первом приближении решение этой задачи может быть получено с использованием инженерных подходов на основе простейших соотношений теории упругости, сопротивления материалов и механики материалов [8, 9, 10]. Изгиб вращающейся цапфы обусловлен одновременным действием силы тяжести и вращения за счет момента внешних сил (рис. 1).

Вращение при изгибе детали цилиндрической формы приводит к формированию сложного напряженно-деформированного состояния [8]. Моделирование такого процесса требует применения эйлерово-лангранжева подхода, прослеживания истории деформирования материальных частиц, в том числе процесса нагружения и процессов упруго-пластического нагружения с появлением вторичных пластических деформаций и изменением предела текучести материала, учета особенностей законопеременного деформирования.

Основная часть. При наличии зоны пластических деформаций в области высоких значений кривизны продольной оси цапфы, ситуация существенно меняется, поскольку в результате пластического нагружения формируется остаточная кривизна [5, 11].

Оценка напряженно-деформированного состояния цапфы, изогнутого под действием собственного веса и веса корпуса, поворачивающегося вокруг оси, выполняется с привлечением уравнений механики материалов. Для учета динамической нагрузки, возникающей при вращении, применяется принцип Даламбера [5, 12], согласно которому ко всем действующим внешним силам добавляются силы инерции.

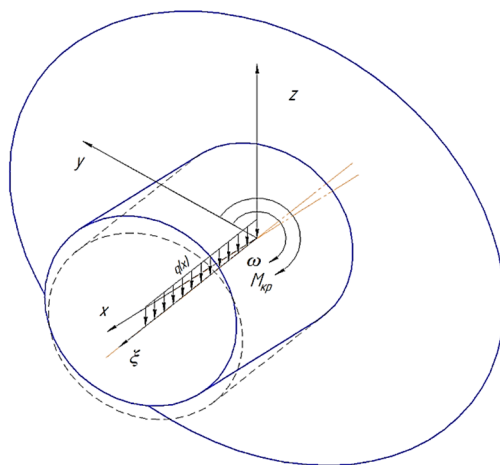


Рис. 1. Расчетная схема изгиба и вращения цапфы

Уравнение изгиба оси цапфы, учитывающее действие сил инерции (рис. 1), имеет вид [5, 6, 7]:

$$EJ \frac{d^4 U(x)}{dx^4} = mg + m\omega^2 U(x), \quad (1)$$

с граничными условиями

$$U(x)|_{x=0} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{dU(x)}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} \Big|_{x=l} = \frac{M(x)}{EJ} \Big|_{x=l} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{d^3 U(x)}{dx^3} \Big|_{x=l} = \frac{q(x)}{EJ} \Big|_{x=l} = 0, \quad (5)$$

где $U(x)$ – функция прогиба цапфы; x – продольная координата; J – геометрический момент инерции объема относительно оси OX, рассчитываемый по формуле:

$$J = \int R_2^2 dV, \quad (6)$$

где R_2 – внешний радиус цапфы, V – объем цапфы; m – погонная масса, рассчитываемая по формуле:

$$m = m_{ц} + 0,5 \cdot m_{к}, \quad (7)$$

где $m_{ц}$ – масса цапфы шаровой мельницы, $m_{к}$ – масса корпуса с мелющими телами и материалом; $M(x)$ – внешний изгибающий момент; $q(x)$ – распределенная массовая нагрузка: $q(x) = mg$, где g – ускорение свободного падения.

Решение неоднородного дифференциального уравнения (1) четвертого порядка представляется общим решением $U_1(x)$ однородного дифференциального уравнения [12, 13]:

$$EJ \frac{d^4 U_1(x)}{dx^4} - m\omega^2 U_1(x) = 0, \quad (8)$$

и частным решением $U_2(x)$ неоднородного дифференциального уравнения:

$$EJ \frac{d^4 U_2(x)}{dx^4} + m\omega^2 U_2(x) = mg. \quad (9)$$

Общее решение $U_1(x)$ уравнения (8) строится в виде [12, 13]:

$$U_1(x) = Ae^{\alpha x}, \quad (10)$$

частное решение $U_2(x)$ уравнения (2.9) согласно [7, 8] разыскивается в виде:

$$U_2(x) = B, \quad (11)$$

соответствующем виду правой части уравнения (9), где A, B и α – искомые константы.

Подстановка решения (10) в однородное дифференциальное уравнение (8) приводит к характеристическому уравнению:

$$EJ\alpha^4 Ae^{\alpha x} - m\omega^2 Ae^{\alpha x} = 0. \quad (12)$$

Введем обозначение

$$D^4 = \frac{m\omega^2}{EJ}. \quad (13)$$

Исходя из (13), полученное соотношение (12) можно представить в виде алгебраического уравнения четвертой степени:

$$\alpha^4 = D^4. \quad (14)$$

Корни уравнения (14) имеют вид:

$$\alpha_1 = +D, \alpha_2 = -D, \alpha_3 = iD, \alpha_4 = -iD, \quad (15)$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая (комплексная) единица.

Общее решение однородного дифференциального уравнения (8) принимает вид:

$$U_1(x) = A_1 e^{Dx} + A_2 e^{-Dx} + A_3 e^{iDx} + A_4 e^{-iDx}. \quad (16)$$

Подстановка решения (11) в неоднородное дифференциальное уравнение (9) приводит к уравнению относительно константы B :

$$m\omega^2 B = mg. \quad (17)$$

Из (17) следует:

$$B = -\frac{g}{\omega^2}. \quad (18)$$

В итоге решения дифференциального уравнения (1) записывается в виде:

$$U(x) = U_1(x) + U_2(x) = A_1 e^{Dx} + A_2 e^{-Dx} + A_3 e^{iDx} + A_4 e^{-iDx} - \frac{g}{\omega^2}. \quad (19)$$

С учетом формулы Эйлера [7]:

$$U(x) = A_1 e^{Dx} + A_2 e^{-Dx} + A_3 \cos Dx + A_4 \sin Dx - \frac{g}{\omega^2}. \tag{20}$$

Для нахождения значений постоянных интегрирования A_1, A_2, A_3, A_4 используются граничные условия (2) – (5):

$$\begin{cases} U(x)|_{x=0} = [A_1 e^{Dx} + A_2 e^{-Dx} + A_3 \cos Dx + A_4 \sin Dx - \frac{g}{\omega^2}]_{x=0} = 0, \\ \frac{dU(x)}{dx} |_{x=0} = [A_1 D e^{Dx} - A_2 D e^{-Dx} - A_3 D \sin Dx + A_4 D \cos Dx]_{x=0} = 0, \\ \frac{dU(x)}{dx} |_{x=0} = [A_1 D e^{Dx} - A_2 D e^{-Dx} - A_3 D \sin Dx + A_4 D \cos Dx]_{x=0} = 0, \\ \frac{d^3 U(x)}{dx^3} |_{x=1} = [A_1 D^3 e^{Dx} - A_2 D^3 e^{-Dx} + A_3 D^3 \sin Dx - A_4 D^3 \cos Dx]_{x=1} = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Соотношения (21) являются системой линейных алгебраических уравнений относительно искомым величин A_1, A_2, A_3, A_4 :

$$\begin{cases} 1A_1 + 1A_2 + 1A_3 + 0A_4 = \frac{g}{\omega^2}, \\ DA_1 - DA_2 + 0A_3 + DA_4 = 0, \\ D^2 e^{Dl} A_1 + D^2 e^{-Dl} A_2 - D^2 \cos Dl A_3 - D^2 \sin Dl A_4 = 0, \\ e^{Dl} D^3 A_1 - e^{-Dl} D^3 A_2 + D^3 \sin Dl A_3 - D^3 \cos Dl A_4 = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Решение полученной системы линейных алгебраических уравнений (22) с подстановкой всех известных величин позволяет определить постоянные интегрирования:

$$A_1 = 28,73588; A_2 = 53,71975; A_3 = 74,50436; A_4 = 24,98738. \tag{23}$$

Решение (19) принимает вид:

$$U(x) = 28,73588e^{Dx} + 53,71975e^{-Dx} + 74,50436 \cos(Dx) + 24,98738 \sin(Dx) - \frac{g}{\omega^2}. \tag{24}$$

Кривизна прогиба осевой линии цапфы определяется по формуле:

$$\kappa = \frac{d^2 U(x)}{dx^2} = D^2 (28,73588e^{Dx} + 53,71975e^{-Dx} + 74,50436 \cos(Dx) + 24,98738 \sin(Dx)) \tag{25}$$

На рисунке 2 приведена форма прогиба осевой линии цапфы при ее вращении, на рисунке 3 – кривизна прогиба оси цапфы.

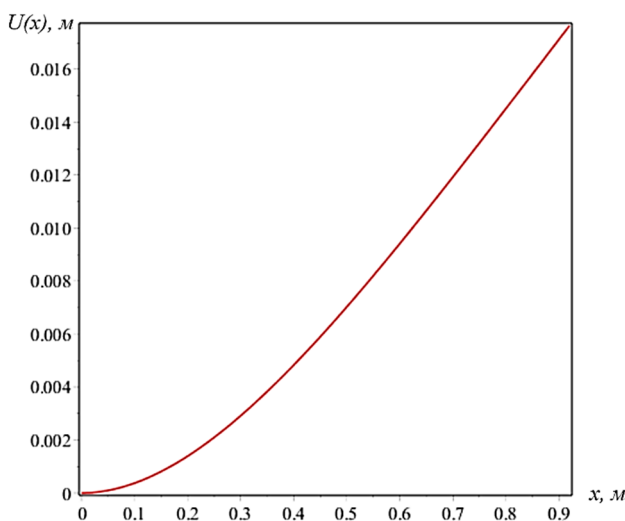


Рис. 2. Зависимость прогиба от продольной координаты OX при действии силы тяжести и вращения на ось цапфы

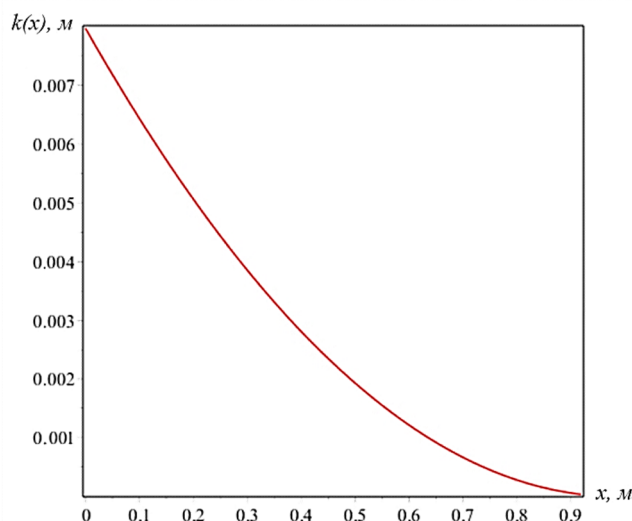


Рис. 3. Зависимость кривизны прогиба от продольной координаты OX при действии силы тяжести и вращения на ось цапфы

Напряжения, возникающие в цапфе шаровой мельницы, согласно [6] определяются как:

$$\sigma = E \cdot k \cdot R_2. \tag{26}$$

На рисунке 4 представлен график зависимости напряжения цапфы от продольной координаты x, показывающий распределение напряжения по

длине внешней цилиндрической поверхности цапфы при действии силы тяжести и вращения.

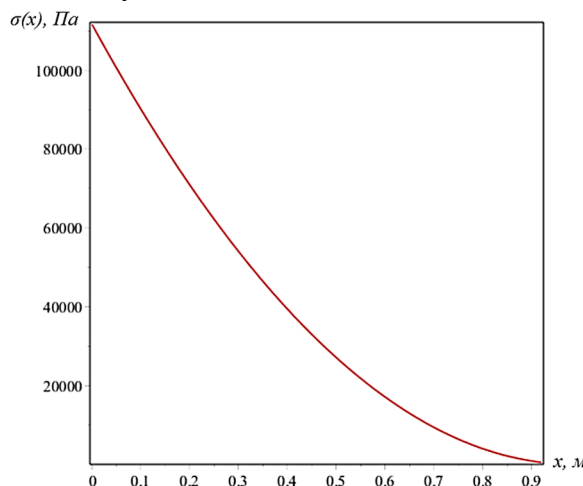


Рис. 4. Зависимость напряжения от продольной координаты при действии силы тяжести и вращения на ось цапфы

Как видно из рисунка 3, наибольшая кривизна цапфа имеет место в точке $x=0$:

$$k|_{x=0} = D^2(28,73588e^{D \cdot 0} + 53,71975e^{-D \cdot 0} + 74,50436 \cos(D \cdot 0) + 24,98738 \sin(D \cdot 0)) = 0,79769 \quad (27)$$

Следовательно, наибольшие по модулю напряжения в цапфе достигаются именно в этом сечении,

$$\sigma_{max} = E \cdot k_{max} \cdot R_2 = 111676 \text{ Па.} \quad (28)$$

Определение величины касательного напряжения от действия крутящего момента $M_{кр}$, приложенного к цапфе, выполняется согласно [5, 6, 8]:

$$\tau = \frac{M_{кр}}{I_p} R_2, \quad (29)$$

где $M_{кр}$ – крутящий момент шаровой мельницы; I_p – полярный момент инерции поперечного сечения [11]:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \quad (30)$$

Для определения эквивалентного напряжения цапфы в данном случае, формула (30) будем иметь вид:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma + 3\tau_x^2} = 0,1118 \text{ МПа.}$$

Выводы. Получено уравнение изгиба оси цапфы, учитывающее действие сил инерции. Получены зависимости прогиба, кривизны прогиба и напряжения от продольной координаты при действии силы тяжести и вращения на ось цапфы. Определена величина касательного напряжения от действия крутящего момента. Определено общее выражение эквивалентного напряжения, учитывающее сложное напряженно-деформированное состояние цапфы шаровой мельницы, ис-

$$I_p = 4\pi(R_2^4 - R_1^4);$$

Для заданных значениях радиуса внешней и внутренней поверхности цапфы и крутящего момента шаровой мельницы, максимальное сдвиговое напряжение определяется величиной:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{I_p} R_2 = 3516 \text{ Па.}$$

Учитывая сложное напряженно-деформированное состояние цапфы шаровой мельницы, испытывающей растягивающее напряжение от изгибающих нагрузок и сдвиговое напряжение от крутящего момента, эквивалентное напряжение следует определять с использованием понятия интенсивности напряжения σ_i , определяемого общим выражением [5, 6, 15]:

пытывающей растягивающее напряжение от изгибающих нагрузок и сдвиговое напряжение от крутящего момента.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Маркова О.В. Аулов В.Г., Лавренчук А.Н., Федоренко М.А. Анализ методов расчета износа контактных поверхностей трения // Международная научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и научно-технический прогресс» (г. Губкин, 12 апреля 2012 г), Губкин: Изд-во БГТУ, 2012. С. 65-69.
2. Федоренко М.А., Маркова О.В. Колебательные процессы в помольных мельницах цементной промышленности // Международная научно-практическая конференция «Техника и

технология современных производств», Пенза, 2014. С. 113–116.

3. Богданов В.С., Ильин А.С., Семикопенко И.А. Основные процессы в производстве строительных материалов. Белгород: Изд-во БГТУ им. В.Г.Шухова. 2008. 550 с.

4. Гологорский Е.Г., Доценко А.И., Ильин А.С. Эксплуатация и ремонт оборудования предприятий стройиндустрии. М.: Архитектура, 2006. 503 с.

5. Бояршинов М.Г. Оценка напряженно-деформированного состояния вращающегося длинного цилиндра // Вестник ПНИПУ. Механика. 2013. № 1. С. 25–38.

6. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б. Расчет на прочность деталей машин. М.: Машиностроение, 1979. 702 с.

7. Эрдеди А.А., Эрдеди Н.А.. Теоретическая механика. Сопrotивление материалов. М.: Академия, 2012. 320 с.

8. Светлицкий В.А. Строительная механика машин. Механика стержней. В 2 томах. М.: Физматлит, 2009. 408 с.

9. Варданын Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопrotивление материалов с основами теории упругости и пластичности. М.: Инфра-М, 2011. 640 с.

10. А.И. Дудяк, Т.А. Сахнович. Прикладная теория упругости. М.: Издательство Гревцова, 2010. 164 с.

11. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 2003. 720 с.

12. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Том 1. М.: Физматлит, 2009. 400 с.

13. Эльсгольц Л.Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения. СПб.: Лань, 2002. 224 с.

14. Бьюи Х.Д. Механика разрушения. Обратные задачи и решения. М.: Москва, 2011. 410 с.

15. Бардзокас Д.И., Фильштинский Л.А., Фильштинский М.Л. Актуальные проблемы связанных физических полей в деформируемых телах. Математический аппарат физических и инженерных наук. Том 1. М.: Москва, 2010. 864 с.

Информация об авторах

Бондаренко Юлия Анатольевна, доктор технических наук, профессор кафедры технологии машиностроения. E-mail: kds2002@mail.ru. Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова. Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, 46.

Ханин Сергей Иванович, доктор технических наук, профессор кафедры механического оборудования. E-mail: dh@intbel.ru. Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова. Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, 46.

Бестужева Ольга Васильевна, старший преподаватель кафедры прикладной информатики и информационных технологий. E-mail: bestuzheva@bsu.edu.ru. Белгородский государственный национальный исследовательский университет. Россия, 308015, Белгород, ул. Победы, 85.

Поступила в декабре 2018 г.

© Бондаренко Ю.А., Ханин С.И., Бестужева О.В., 2019

¹*Bondarenko Ju.A.,* ¹*Khanin S.I.,* ^{2,*}*Bestuzheva O.V.*

¹*Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov*
Russia, 308012, Belgorod, st. Kostyukova, 46

²*Belgorod State National Research University*
Russia, 308015, Belgorod, st. Pobedy, 85

**E-mail: bestuzheva@bsu.edu.ru*

MATHEMATICAL DESCRIPTION OF STRESS-STRAIN CONDITION OF BALL MILL'S PIN UNDER THE FORCE OF GRAVITY AND ROTATION

Abstract. *The article discusses the pin of a ball mill under the action of constant loads of the body with grinding material, the simultaneous action of gravity and rotation due to the moment of external forces. During the operation of a ball mill, a dangerous section of the bottoms is the place where the cylindrical part of the trunnion becomes conical. The stress-strain condition of the ball mill's pin is estimated on the basis of a mathematical model that includes a complete system of equilibrium equations, defining ratios of elastoplastic deformation. It takes into account the effects of cyclic loading of the material, with the corresponding initial and boundary conditions. The dynamic load that occurs during rotation is taken into account, according to*

the D'Alembert's principle, which means inertia forces are added to all acting external forces. The bend equation of pin's axle is obtained; it considers the action of inertia forces. The dependences of the deflection, deflection curvature and stress on the longitudinal coordinate under the action of gravity and rotation on the pin's axle are obtained. The value of the shear stress from the action of torque is determined. The general expression of equivalent stress is examined. It includes the complex stress-strain condition of the ball mill's pin, which experiences tensile stress from bending loads and shear stress of torque.

Keywords: pin of ball mill, depreciation of equipment, the mathematical description of the stress-strain condition, the bending of the rotating pin.

REFERENCES

1. Markova O.V., Aulov V.G., Lavrenchuk A.N., Fedorenko M.A. Analysis of methods for calculating the wear of friction contact surfaces. International Scientific and Practical Conference of Students, Postgraduates and Young Scientists "Youth and Scientific and Technical Progress" (Gubkin, April 12, 2012), Gubkin: BSTU Publishing House, 2012, p. 65–69.
2. Fedorenko M.A., Markova O.V. Oscillatory processes in the grinding mills of the cement industry. International scientific-practical conference "Technique and technology of modern production", Penza, 2014, p. 113–116.
3. Bogdanov V.S., Il'in A.S., Semikopenko I.A. The main processes in the production of building materials. Belgorod: Izd-vo BSTU V.G. Shukhova, 2008, 550 p.
4. Gologorsky E.G., Dotsenko A.I., Ilyin A.S. Maintenance and repair of equipment of construction enterprises. M.: Architecture, 2006, 503 p.
5. Boyarshinov M.G. Evaluation of the stress-strain state of a rotating long cylinder. Bulletin of the PNRPU, Mechanics, 2013, no. 1, p. 25–38.
6. Birger I.A., Shorr B.F., Iosilevich G.B. Calculation of the strength of machine parts. M.: Mashinostroenie, 1979, 702 p.
7. Erdedi A.A., Erdedi N.A., Theoretical Mechanics. Strength of materials. M.: Academy, 2012, 320 p.
8. Svetlitsky VA. Construction mechanics of machines. Rod mechanics. In 2 volumes. M.: Fizmatlit, 2009, 408 p.
9. Vardanyan G.S., Andreev V.I., Atarov N.M., Gorshkov A.A. Resistance of materials with the fundamentals of the theory of elasticity and plasticity. M.: Infra-M, 2011, 640 p.
10. Dudyak A.I., Sakhnovich T.A. Applied theory of elasticity. Moscow: Grevtsova Publishing, 2010, 164 p.
11. Nikitin N.N. The course of theoretical mechanics. M.: Higher School, 2003, 720 p.
12. Kudryavtsev LD A short course of mathematical analysis. Vol. 1. M.: Fizmatlit, 2009, 400 p.
13. Elsgolts L.E. Ordinary differential equations. SPb.: Lan, 2002, 224 p.
14. Buie H.D. Fracture mechanics. Inverse problems and solutions. M.: Moscow, 2011, 410 p.
15. Bardzokas D.I., Filshtinsky L.A., Filshtinsky M.L. Actual problems related physical fields in deformable bodies. Mathematical apparatus of physical and engineering sciences. Volume 1. M.: Moscow, 2010. 864 p.

Information about the authors

Bondarenko, Julia A. DSc, Professor. E-mail: kds2002@mail.ru. Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov. Russia, 308012, Belgorod, st. Kostyukova, 46.

Khanin, Sergey I. DSc, Professor. E-mail: dh@intbel.ru. Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov. Russia, 308012, Belgorod, st. Kostyukova, 46.

Bestuzheva, Olga V. Senior lecturer. E-mail: bestuzheva@bsu.edu.ru. Belgorod State National Research University. Russia, 308015, Belgorod, st. Pobedy, 85.

Received in Desember 2018

Для цитирования:

Бондаренко Ю.А., Ханин С.И., Бестужева О.В. Математическое описание напряженно-деформированного состояния цапфы шаровой мельницы под действием силы тяжести и вращения // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2019. № 3. С. 128–133. DOI: 10.34031/article_5ca1f6356f67c4.15287599

For citation:

Bondarenko Ju.A., Khanin S.I., Bestuzheva O.V. Mathematical description of stress-strain condition of ball mill's pin under the force of gravity and rotation. Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov, 2019, no. 3, pp. 128–133. DOI: 10.34031/article_5ca1f6356f67c4.15287599