DOI: 10.12737/article_5940f018660ea0.09243801

Юрьев А.Г., д-р техн. наук, проф.,
Зинькова В.А., ст. преп.,
Смоляго Н.А., канд. техн. наук, доц.,
Яковлев О.А., доц.
Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова

ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ФЕРМ

yuriev_ag@mail.ru

Эффективный способ определения структуры металлической фермы имеет вариационную основу. Вариационная постановка задачи является фундаментальным подходом к реализации замысла, поскольку из нее вытекает универсальный критерий оптимальности, связанный с минимумом потенциальной энергии системы в функциональном пространстве, расширенном за счет полей функций конфигурации и (или) модулей материала. При однородном линейно-упругом материале оптимальную ферму можно представить как равнопрочную систему с внутренними силами N_i/φ_i, где φ_i – коэффициент уменьшения расчетного сопротивления материала. В качестве численного эксперимента рассмотрено определение оптимальной структуры фермы с консолями. Из четырех рассмотренных вариантов минимальный объем материала получен для фермы с нисходящими раскосами и горизонтальным фрагментом верхнего пояса. На этапе определения оптимальной геометрии фермы при заданной ее топологии задача решается строго вариационными методами структурного синтеза, а на этапе оптимизации топологии – сравнением приемлемых вариантов. Однако и в том, и в другом случае единым остается критерий оптимальности, приводящий в итоге к минимуму расхода материала.

Ключевые слова: *структура фермы, вариационная постановка задачи, критерий оптимальности.*

Введение. Рационализация структуры ферм наблюдается на всем пути их практического применения. Металлические фермы нашли использование прежде всего в мостостроении. В связи с этим следует упомянуть имена российских инженеров и ученых: Д.К. Журавского, С.В. Кербедза, Н.А. Белелюбского, Л.Д. Проскурякова и др.

Задачи оптимизации конструкций ферм за счет рационального расположения их элементов впервые рассмотрел В.Г. Шухов [1]. В сущности, это касалось оптимальной топологии, если под последней понимать расположение узлов и способ их соединения между собой для образования геометрически неизменяемой системы.

Теоретические исследования фактора топологии стержневых систем получили определенное развитие во второй половине XX века. Выделяется работа К. Мажида [2], в которой содержатся формулировки и доказательства теорем о влиянии структурных изменений на функционирование стержневых систем. Уделено внимание главным факторам в оптимальном проектировании.

Главенствующее значение имеет критерий оптимизации. Исторически складывалась ситуация, когда для конструкции из однородного материала считалось правомерным ориентироваться на минимум его объема (массы, стоимости). Критерий, таким образом, получал экономическую форму. Его внедрение в задачи механики деформирования твердого тела создавало определенные неудобства с соблюдением основополагающих вариационных принципов. В итоге это приводило к проблематичности поиска глобального экстремума функции (функционала) цели [3–5].

Решение этой проблемы стало возможным после установления вариационных принципов структурного синтеза [6], из которых вытекает формулировка универсального критерия оптимальности.

Основная часть. Вариационная постановка оптимизационной задачи может быть представлена в форме интегрального тождества или приводится к требованию стационарности соответствующего функционала.

При проектировании дискретных систем из линейно-упругого материала (с модулем E) используем функционал Кастильяно. Рассмотрим виртуальную систему с внутренними силами N_i/φ_i. Коэффициент φ_i для растянутых стержней равен единице, а для сжатых принимается исходя из ограничения элементов пояса и решетки [7]. Искомые площади поперечных сечений сжатых стержней должны иметь соответствующие минимальные радиусы инерции.

В этом случае при решении изопериметрической задачи для фермы функционал Кастильяно имеет следующий вид:

$$J = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i^2 l_i}{2E\varphi_i^2 A_i} + \lambda \sum_{i=1}^{n} A_i l_i, \quad (1)$$

где n – число стержней длиной l_i, имеющих площадь поперечного сечения A_i и продольное усилие N_i, λ – множитель Лагранжа, имеющий постоянную величину.

Следствием стационарности функционала (1) являются m уравнений совместности деформаций (m – число лишних связей):

$$\partial J / \partial N_m = 0, \quad (2)$$

уравнение объема (V_0 – заданный объем):

$$\sum_{i=1}^{n} A_i l_i = V_0 \quad (3)$$

и n уравнений структурообразования:

$$\partial J / \partial A_i = 0, \quad (4)$$

или

$$-\frac{N_i^2}{2E\varphi_i^2 A_i^2} + \lambda = 0. \quad (5)$$

Так как $N_i / (\varphi_i A_i)$ выражает напряжение σ_i в i-м стержне виртуальной фермы с внутренними силами N_i/φ_i, то уравнения (5) принимает вид

$$\sigma_i^2 / 2E = \lambda \ (\lambda = \text{const}) \quad (6)$$

свидетельствующий о равнонапряженности виртуальной фермы. Тем самым определяется критерий оптимальности проектируемой фермы. Он распространяется на любую структуру (конфигурацию).

Для металлических ферм, согласно существующим нормам, вводится расчетное сопротивление R материала. Его наличие во всей конфигурации является дополнительным условием в оптимизационной задаче. Оно вводится в функционал без множителя Лагранжа.

Поскольку

$$A_i = N_i / (\varphi_i R), \quad (7)$$

выражение потенциальной энергии деформации принимает вид:

$$J = \frac{R}{2E} \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i l_i}{\varphi_i}, \quad (8)$$

а выражение объема с учетом (7) и (8) представляется в виде

$$V = 2EJ / R^2. \quad (9)$$

Следовательно, в случае глобального минимума функционала (8) объем материала фермы также принимает минимальное значение.

Решение вариационной задачи по определению геометрии фермы приведено в [8]. В качестве варьируемых параметров приняты высоты стоек h_i, кроме заданных изначально.

Сложность анализа зависимости усилий в ферме от изменения геометрии состоит в непостоянстве знака усилий. При переходе растянутого стержня в разряд сжатых, кроме прочности, необходимо обеспечить устойчивость его равновесия. «Перемещение» коэффициента уменьшения расчетного сопротивления φ_i для сжатых стержней изменяет вид выражения J при итерационном расчете.

Минимум функционала (8) при варьировании длин t стержней соответствуют условию:

$$\frac{\partial J}{\partial h_i} = 0, \ (i=1,2,\ldots t) \quad (10)$$

Решение задачи оптимизации конфигурации фермы предусматривает следующие операции: 1) задание директивных параметров (пролета, высоты и др.), коэффициентов φ и выбор переменных h_i; 2) определение выражений внутренних усилий в стержнях; 3) выделение стержней с переменным знаком усилий и назначение знаков в начальном приближении; 4) запись выражения потенциальной энергии деформации J; 5) удовлетворение критерию оптимальной конфигурации: $\partial J / \partial h_i = 0$ (i=1, 2, …, t) 6) решение системы алгебраических уравнений; 7) проверка удовлетворения принятым знакам внутренних усилий; положительный результат означает окончание решения, в случае отрицательного результата необходимо возвратиться к п. 3.

Вслед за проблемой оптимизации геометрии фермы следует самый высокий уровень ее проектирования – оптимизация ее топологии, под которой понимают предопределение узлов и способ их соединения между собой для образования геометрически неизменяемой системы. Здесь в первую очередь имеется в виду оптимальная решетка, то есть рациональное расположение раскосов и стоек [9–16].

Рассмотрим, например, два варианта однопролетной фермы (рис. 1): первый (I) – с восходящими раскосами, второй (II) – с нисходящими раскосами (показаны штрихами).

В табл. 1 представлены длины стержней l_i и усилий в них N_i для первого и второго вариантов раскосов соответственно.

Потенциальная энергия деформации, вычисленная по формуле (8), составляет: для первого варианта 414,96 Дж, для второго варианта 379,77Дж, а соответствующие объемы материала, вычисленные по формуле (9) – 0,294 м^3 и 0,269 м^3. Следовательно, преимущество имеет ферма с нисходящими раскосами.

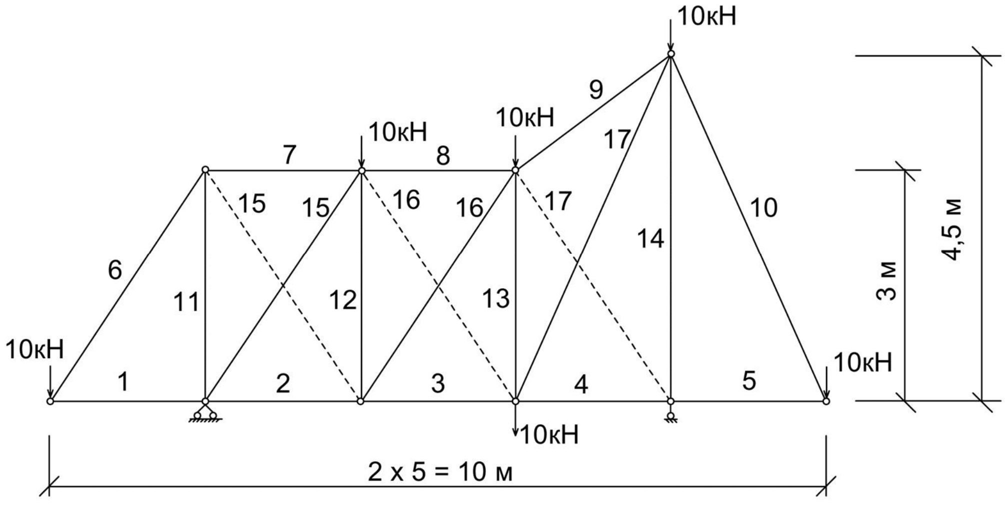

Рис. 1. Ферма с консолями при двух вариантах раскосов

Таблица 1

Длины стержней и усилия в них для двух вариантов фермы (рис. 1)

№ стержня	ℓ_i, м	N_i, кН		№ стержня	ℓ_i, м	N_i, кН	
		I	II			I	II
1	2	-6,667	-6,667	10	4,92	10,943	10,943
2	2	2,222	-6,667	11	3	-10	-23,333
3	2	4,444	2,222	12	3	3,333	-13,333
4	2	-4,444	4,444	13	3	-10	6,667
5	2	-4,444	-4,444	14	4,5	-36,667	-23,333
6	3,6	12,419	12,019	15	3,6	-16,025	16,025
7	2	6,667	-2,222	16	3,6	-4,006	4,006
8	2	-2,222	-4,444	17	4,92/3,6	21,886	-16,025
9	2,5	-5,556	5,556				

Рассмотрим влияние трансформации верхнего пояса фермы (рис. 2) на изменение показателей оптимальности. В табл. 2 представлены длины стержней l_i и усилий в них N_i для первого и второго вариантов раскосов соответственно.

Потенциальная энергия деформации, вычисленная по формуле (8), составляет: для первого варианта 400 Дж, для второго варианта 387,495 Дж, а соответствующие объемы материала, вычисленные по формуле (9), 0,283 м^3 и 0,274 м^3. Преимущество опять-таки имеет ферма с нисходящими раскосами.

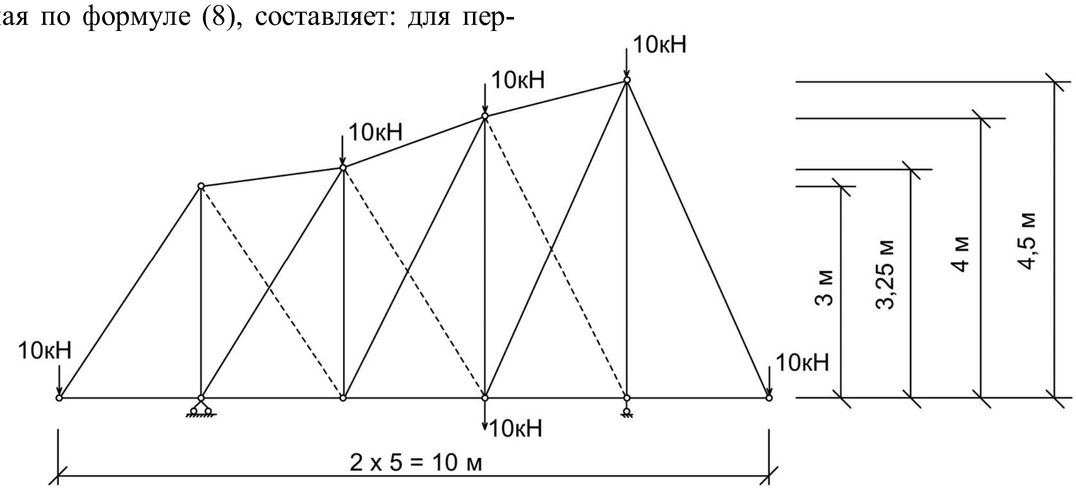

Рис. 2. Ферма с консолями и полигональным верхним поясом при двух вариантах раскосов (номера стержней на рис. 1)

Таблица 2

Длина стержней и усилия в них для первого варианта фермы (рис. 2)

№ стержня	ℓ_i, м	N_i, кН		№ стержня	ℓ_i, м	N_i, кН	
		I	II			I	II
1	2	-6,667	-6,667	10	4,92	10,943	10,943
2	2	2,051	-6,667	11	3	-9,167	-23,333
3	2	3,333	2,051	12	3,25	2,564	-13,077
4	2	-4,444	3,333	13	4	-7,5	7,917
5	2	-4,444	-4,444	14	4,5	-36,667	-21,111
6	3,6	12,019	12,019	15	3,816/3,6	-16,634	15,717
7	2,016	6,719	-2,067	16	4,472/3,816	-2,867	2,446
8	2,136	-2,191	-3,56	17	4,92/4,472	19,151	-17,392
9	2,062	-3,436	4,581				

Из четырех рассмотренных вариантов преимущественные показатели имеет ферма, представленная на рис. 1 с нисходящими раскосами. Объем ее материала на 1,9 % меньше чем у аналогичной фермы с полигональным верхним поясом.

Выводы. В заключение можно сказать, что на этапе определения оптимальной геометрии фермы при заданной ее топологии задача решается строго вариационными методами структурного синтеза, а на этапе оптимизации топологии – сравнением определенных вариантов. Однако и в том, и в другом случае единым остается критерий оптимальности, вытекающий из вариационной постановки проектной задачи и приводящий в итоге к минимуму расхода материала.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шухов В.Г. Строительная механика. Избранные труды. М.: Наука, 1977. 193 с.

2. Majid K.I. Optimum design of structures. London: Newnes-Butterworths, 1979. 238 p.

3. Michell A.G.M. The limits of economy of materials in framestructures // Philosophical magazine and jornal of science. 1904. V. 8. № 47.

4. Прагер В. Основы теории оптимального проектирования конструкций. М: Мир, 1977. 111 с.

5. Сергеев Н. Д., Богатырев А.И. Проблемы оптимального проектирования конструкций. Л.: Стройиздат, 1971. 130 с.

6. Юрьев А.Г. Строительная механика: структурный синтез. М.: МИСИ, 1982. 100с.

7. Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81*: СП 16.13330.2011. М.: ОАО «ЦПП», 2011. 171 с.

8. Зинькова В.А., Юрьев А.Г., Толбатов А.А. Вариационная постановка оптимизационной задачи для плоских ферм [Электронный ресурс] // Вестник науки и образования Северо-Запада России: сб. докл. 1-й Междунар. науч.-практ. конф. «Инновации в науке, производстве и образовании», 2015. Т. 1. № 4. Режим доступа: http://vestnik-nauki.ru.

9. Bendsφe M.P., Sigmund O. Topology optimization: theory, methods, and applications. Berlin: Springer, 2003. 376 p.

10.Зинькова В.А. Методика экспериментальных исследований узловых соединений трубчатых элементов фермы // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2012. № 1. С. 50–52.

11.Юрьев А.Г., Нужный С.Н. Оптимизация топологии однопролетных одноэтажных рам // Фундаментальные исследования. 2013. № 10. С 742–746.

12.Зинькова В.А. Оптимизация топологии металлических ферм // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2015. № 2. С. 37–40.

13. Марутян А.С. Легкие металлоконструкции из гнутосварных профилей, включая перекрестные фермы типа «Пятигорск» и перспектива их развития // Сб. докл. Междунар. науч.-практ. конф., посвященной 60-летию БГТУ им. В.Г. Шухова «Наукоемкие технологии и инновации», Белгород. 2014. С. 53–57.

14. Zinkova V.A., Yuriev A.G., Peshkova E.V. Designing of Tube Trusses without Gusset Plate with Joint Connections // International Journal of Applied Engineering Research. 2015. № 5. Vol. 10. P. 12391–12398.

15.Марутян А.С., Оробинская В.Н. Оптимизация конструкций с решетками из круглых и овальных труб // Вестник МГСУ. 2016. № 10. С. 45–57.

16. Марутян А.С., Оробинская В.Н. Трехгранные фермы покрытий (перекрытий) и оптимизация их высот // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. № 2 (101). С. 172–183.

Yuriev A.G., Zinkova V.A., Smolyago N.A., Yakovlev O.A.

STRUCTURE OPTIMIZATION OF THE METAL TRUSSES

Efficient method structure determination of metal truss has variational basis. Variational statement of problem is a fundamental approach of intention realization. From it follows universal criterion of optimization, connecting with minimum of potential energy of the system in function space expanded at the expense of function fields of configuration and (or) material moduls. Under the condition of homogeneous linear elastic material optimal truss represents as uniresistant virtual system with internal forces N/ω_i (ω_i – decrease coefficient of designed resistance of material). As numerical example was considered the determination of optimal structure of the truss with the consoles. Of the four variants, the minimum amount of material obtained for the truss with downward diagonals and the horizontal fragment of the upper belt. At the stage of optimal geometry determination of a truss at a given geometry the problem is solved strictly by variational methods of structural synthesis, and at stage of the topology optimization – by comparison of admissible variants. However, in both cases is present a single criterion of optimality, carrying into minimum of material expense.

Key words: *truss structure, variational statement of problem, optimization criterion.*

Юрьев Александр Гаврилович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры теоретической механики и сопротивления материалов.
Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова.
Адрес: Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, д. 46.
E-mail: yuriev_ag@mail.ru

Зинькова Виктория Анатольевна, начальник отдела создания и оценки объектов интеллектуальной собственности.
Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова.
Адрес: Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, д. 46.
E-mail: vikzinkova@mail.ru

Смоляго Нина Алексеевна, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры теоретической механики и сопротивления материалов.
Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова.
Адрес: Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, д. 46.
E-mail: NASmolyago@mail.ru

Яковлев Олег Александрович, доцент кафедры теоретической механики и сопротивления материалов.
Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова.
Адрес: Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, д. 46.
E-mail: yak-oleg@yandex.ru