Толстопятов С.Н., канд. физ.-мат. наук, доц.
Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова
Голованова Е.В., канд. физ.-мат. наук, доц.
Белгородский государственный аграрный университет им. В.Я. Горина

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАТУХАНИЯ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКОМ ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

olga160@yandex.ru

Построена математическая модель, описывающая процесс распространения и затухания высокочастотных (ультразвуковых) волн малой амплитуды в упруго пластическом теле. Показана возможность экспресс-оценки одномерного напряженно-деформированного состояния методом затухания ультразвука. Исследована зависимость величины декремента затухания высокочастотных колебаний от текущих и остаточных деформаций в условиях одноосного напряженно-деформированного состояния.

Ключевые слова: *математическая модель, ультразвук, затухание, напряженно-деформированнное состояние, прочностные характеристики, пористость, дислокации.*

В работе предложен математический метод изучения затухания ультразвуковых волн малой амплитуды под действием одноосных растягивающих напряжений. Математическое моделирование затухания ультразвука в поликристаллическом твердом теле сводится к рассмотрению рассеяния упругих волн различными частицами – включениями, поэтому среда предполагается упругой, но с различными включениями. Анализ выполненных ранее экспериментов и результаты работ [1, 2] показал, что в пластически деформированном теле наблюдается эффект затухания ультразвуковых волн. Причем, если к телу приложены такие нагрузки, при которых реализуется напряженно-деформированное состояние, выходящее за пределы линейной упругости, то затухание догрузочных волн (ультразвуковых, малой амплитуды) растет с увеличением пластических деформаций. Следовательно, по отношению к ультразвуковым догрузочным волнам пластически деформированное тело ведет себя как сплошная среда, поглощающая высокочастотные волны. Таким образом, в основе построения математической модели лежат следующие предположения:

1. «догрузочные» волны в недеформированном (или упруго деформированном) теле распространяются со скоростью звука;
2. в пластически деформированном теле затухание «догрузочных» волн увеличивается с ростом напряжений;
3. статические диаграммы $\sigma - \varepsilon$ одноосного состояния существуют и имеют выраженный упругий участок.

С учетом сделанных предположений математическая модель одномерного напряженно-деформированного состояния образца описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \text{э}}{\partial t} = f\left(\text{э}, \sigma, \dfrac{\partial \sigma}{\partial t}\right) \\ \rho \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial \sigma}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \text{э}}{\partial t} = \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \qquad (1)$$

Первое уравнение является определяющим соотношением, второе – уравнением движения без учета массовых сил, третье – уравнением совместности кинематических полей скорости и деформаций.

Пусть $(\sigma_0, \text{э}_0)$ – характеризуют основное состояние в растянутом приложенными силами образце, поэтому $(\sigma_0, \text{э}_0)$ – это некоторая точка, взятая на статической диаграмме «$\sigma - \text{э}$», а σ^* *и* э^* – это малые «догрузочные» напряжения и деформации, характеризующие быстрый процесс изменения основного состояния из-за наложенных на него ультразвуковых волн, т.е. $\text{э} = \text{э}_0 + \text{э}^*$; $\sigma = \sigma_0 + \sigma^*$. Обозначим частную производную штрихом вверху, а индексом внизу переменную, по которой ведется дифференцирование, точкой вверху – частную производную по t.

Заменяя в преобразованиях $\frac{\partial \text{э}}{\partial t}$ на f, согласно первому уравнению (1), будем иметь:

$$\frac{\partial^2 \text{э}^*}{\partial t^2} = f''_{\text{ээ}} f \text{э}^* + f''_{\text{э}\sigma} f \sigma^* + f''_{\text{э}\dot\sigma} f \dot\sigma^* + f'^2_{\text{э}} \text{э}^* + f'_{\sigma} f'_{\text{э}} \sigma^* + f'_{\dot\sigma} f'_{\text{э}} \dot\sigma^* + f''_{\sigma\text{э}} \dot\sigma \text{э}^* + f''_{\sigma\sigma} \dot\sigma \sigma^* +$$

$$+ f''_{\sigma\dot\sigma} \dot\sigma \dot\sigma^* + f'_{\sigma} \dot\sigma'_{\text{э}} \text{э}^* + f'_{\sigma} \dot\sigma'_{\sigma} \sigma^* + f'_{\sigma} \dot\sigma'_{\sigma} \sigma^* + f''_{\dot\sigma\text{э}} \ddot\sigma \sigma^* + f''_{\dot\sigma\sigma} \ddot\sigma \sigma^* + f''_{\dot\sigma\dot\sigma} \ddot\sigma \dot\sigma^* + f'_{\dot\sigma} \ddot\sigma'_{\text{э}} \text{э}^* +$$

$$f'_{\dot\sigma} \ddot\sigma'_{\sigma} \sigma^* + f'_{\dot\sigma} \ddot\sigma'_{\dot\sigma} \dot\sigma^* .$$

В этом соотношении все величины не отмеченные «звездочкой» относятся к основному статическому состоянию. Поэтому, $\dot{\sigma}'_{э} = 0$; $\dot{\sigma}_{\sigma} = 0$; $\dot{\sigma}'_{\dot{\sigma}} = 1$; $\ddot{\sigma}'_{\dot{\sigma}} = 0$; $\ddot{\sigma}'_{э} = 0$; $\dot{\sigma} = 0$; $\ddot{\sigma} = 0$. Так как скорость распространения догрузочных импульсов совпадает со стержневой скоростью, имеем, что $f'_{\dot{\sigma}} \approx \frac{1}{E}$,

где E – модуль Юнга. С учетом этого равенства получим

$$\frac{\partial^2 э^*}{\partial t^2} = \left(f''_{ээ} f + f'^2_{э}\right) э^* + \left(f''_{э\sigma} f + f'_{\sigma} f'_{э}\right)\sigma^* + \left(f''_{э\dot{\sigma}} f + \frac{1}{E} f'_{э} + f'_{\sigma}\right)\dot{\sigma}^* + \frac{1}{E}\ddot{\sigma}^*$$

Введя обозначения $f''_{ээ} f + f'^2_{э} \equiv \varepsilon$, $f''_{э\sigma} f + f'_{\sigma} f'_{э} \equiv \beta 2$, $f''_{э\dot{\sigma}} f + \frac{1}{E} f'_{э} + f'_{\sigma} \equiv 2\alpha$, получим линеаризованное уравнение для «догрузочных» деформаций в виде

$$\frac{\partial^2 э^*}{\partial t^2} = \varepsilon э^* + \beta^2 \sigma^* + 2\alpha \dot{\sigma}^* + \frac{1}{E}\ddot{\sigma}^* \qquad (2)$$

или в безразмерном виде:

$$\frac{\partial^2 э^*}{\partial t^2} = \varepsilon э^* + \frac{\beta^2}{E}\sigma^* + \frac{2\alpha}{E}\dot{\sigma}^* + \frac{1}{E}\ddot{\sigma}^*$$

Проведя линеаризацию полученного выше уравнения движения:

$$\rho\left(f'_{э} f + f'_{\sigma}\dot{\sigma} + f'_{\dot{\sigma}}\ddot{\sigma}\right) = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2},$$

найдем

$$э^* = \frac{1}{\rho\varepsilon}\frac{\partial^2 \sigma^*}{\partial x^2} - \frac{1}{E\varepsilon}\frac{\partial^2 \sigma^*}{\partial t^2} - \frac{\beta^2}{\varepsilon}\sigma^* - \frac{2\alpha}{\varepsilon}\frac{\partial \sigma^*}{\partial t} \qquad (2)'$$

Это соотношение определяет догрузочные деформации через напряжения. Уравнения (2) и (2)' линейно связывают между собой догрузочные напряжения и деформации. Поэтому из этих соотношений можно получить отдельные уравнения для каждой из догрузочных величин. Выполняя преобразование уравнения (2) с использованием уравнения (2)', получим уравнение четвертого порядка для догрузочных напряжений:

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{1}{\rho\varepsilon}\frac{\partial^2 \sigma^*}{\partial x^2} - \frac{1}{E\varepsilon}\frac{\partial^2 \sigma^*}{\partial t^2} - \frac{\beta^2}{\varepsilon}\sigma^* - \frac{2\alpha}{\varepsilon}\frac{\partial \sigma^*}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 \sigma^*}{\partial x^2}$$

Из этого уравнения следует окончательный вид линеаризованного уравнения для догрузочных волн напряжений:

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\frac{\partial^2 \sigma^*}{\partial x^2} - \rho\left[\frac{1}{E}\frac{\partial^2 \sigma^*}{\partial t^2} + \beta^2 \sigma^* + 2\alpha\frac{\partial \sigma^*}{\partial t}\right]\right\} = \frac{\partial^2 \sigma^*}{\partial x^2} \qquad (3)$$

Полагая $\sigma^* = A\exp(\omega t + \kappa x)$, получим спектральное уравнение:

$$k^2 - \rho\left(\frac{\omega^2}{E} + 2\alpha\omega + \beta^2\right) = \frac{k^2 \varepsilon}{\omega^2}$$

На частотах $\omega \approx$ 10 МГц спектральное уравнение принимает вид

$$k^2 - \rho\left(\frac{\omega^2}{E} + 2\alpha\omega + \beta^2\right) = 0$$

Следовательно, в области высоких частот уравнение (3) может быть аппроксимировано телеграфным уравнением Г. Бэйтмана [3]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\alpha\frac{\partial}{\partial t} + \beta^2\right)\sigma = c^2\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}$$

Уравнение (3), описывает процесс распространения ультразвуковых волн нагружения в пластически деформированном образце и доказывает зависимость от α и β, а следовательно, от функции $f\left(э, \sigma, \frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)$ в определяющем соотношении.

Достаточным для выполнения сформулированных выше положений 1–3 является выбор определяющего соотношения вида:

$$\frac{\partial э}{\partial t} = \frac{1}{E}\dot{\sigma} + f(э, \sigma)$$

Тогда получим следующую систему уравнений математической модели:

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial \sigma}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \text{э}}{\partial t} = \dfrac{1}{E} \dfrac{\partial \sigma}{\partial t} + \delta f(\text{э}, \sigma) \\ \dfrac{\partial \text{э}}{\partial t} = \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \qquad (4)$$

Проведя повторное дифференцирование второго уравнения системы (4), получим:

$$\ddot{\text{э}} = \frac{1}{E}\ddot{\sigma} + f'_{\text{э}}\dot{\text{э}} + f'_{\sigma}\dot{\sigma} = \frac{1}{E}\ddot{\sigma} + f'_{\text{э}}\dot{\text{э}} + f'_{\sigma}\left(E\dot{\text{э}} - Ef\right) = \frac{1}{E}\ddot{\sigma} + \left(f'_{\text{э}} + Ef'_{\sigma}\right)\dot{\text{э}} - Eff'_{\sigma}.$$

Линеаризуя это уравнение с использованием обозначений $f'_{\text{э}} + Ef'_{\sigma} \equiv 2\alpha$, $E\left(f'_{\sigma} f'_{\text{э}} + ff''_{\sigma\text{э}}\right) \equiv \xi^2$, $f'^2_{\sigma} + ff''_{\sigma\sigma} \equiv \eta$ в окрестности некоторого состояния, соответствующего произвольной точке на диаграмме «э – σ» в пластической области получим:

$$\ddot{\text{э}}^* - 2\alpha\dot{\text{э}}^* + \xi^2 \text{э}^* = \frac{1}{E}\ddot{\sigma}^* - E\eta\sigma^*$$

Используя обозначение $p \equiv \dfrac{\partial}{\partial t}$ для оператора дифференцирования по времени, получаем символическую форму записи уравнения в виде:

$$\left(p^2 - 2\alpha p + \xi^2\right)\text{э}^* = \left(\frac{p^2}{E} - E\eta\right)\sigma^* \qquad (5)$$

Дифференцирование первого и третьего уравнений системы (4) дает соотношение:

$$\rho\ddot{\text{э}}^* = \sigma''_{xx} \Rightarrow \rho p^2 \text{э}^* = \sigma''_{xx}.$$

Воздействуя на это соотношения оператором $\left(\dfrac{p^2}{E} - E\eta\right)$, получим:

$$\rho p^2\left(\frac{p^2}{E} - E\eta\right)\text{э}^* = \left(\frac{p^2}{E} - E\eta\right)\overset{*}{\sigma}''_{xx} \qquad (5)'$$

Уравнения (5), (5)' линейно связывают между собой догрузочные деформации и напряжения. Поэтому из них следуют уравнения, отдельно определяющие каждую из догрузочных величин.

Например, из (5) и (5)' имеем уравнение для догрузочных деформаций в ультразвуковой волне:

$$\left(p^2 - 2\alpha p + \xi^2\right)\overset{*}{\text{э}}''_{xx} = \left(\frac{p^2}{E} - E\eta\right)\overset{*}{\sigma}''_{xx} \Rightarrow$$

$$\rho p^2\left(\frac{p^2}{E} - E\eta\right)\overset{*}{\text{э}} = \left(p^2 - 2\alpha p + \xi^2\right)\overset{*}{\text{э}}''_{xx} \qquad (6)$$

Уравнение (6) представляет собой уравнение для «догрузочных» деформаций, решение которого найдем в виде $\text{э}^* = A exp(\omega t + \kappa x)$. Из (6) следует спектральное уравнение и его решение в виде зависимости $k^2 = k^2(\omega^2)$:

$$\rho\omega^2\left(\frac{\omega^2}{E} - E\eta\right) = \left(\omega^2 - 2\alpha\omega + \xi^2\right)\kappa^2 \Rightarrow \kappa^2 = \frac{\rho\omega^2\left(\dfrac{\omega^2}{E} - E\eta\right)}{\omega^2 - 2\alpha\omega + \xi^2}.$$

Тождественно преобразуем правую часть спектрального соотношения:

$$\frac{\rho\omega^2\left(\dfrac{\omega^2}{E} - E\eta\right)}{\omega^2 - 2\alpha\omega + \xi^2} = \frac{\rho}{E}\omega^2 + \frac{2\alpha}{E}\rho\omega + \left(\frac{4\alpha^2\rho}{E} - \rho E\eta - \frac{\rho\xi^2}{E}\right) + \frac{C_1\omega}{\omega^2 - 2\alpha\omega + \xi^2} + \frac{C_2}{\omega^2 - 2\alpha\omega + \xi^2}; \qquad (7)$$

$$C_1 = \frac{8\alpha^3\rho}{E} - \frac{4\alpha\rho\xi^2}{E} - 2\alpha\rho E\eta; \; C_2 = \frac{\rho\xi^4}{E} + \rho\xi^2 E\eta - \frac{4\xi^2\alpha^2\rho}{E}.$$

Отсюда следует, что в области высоких частот $\omega \to \infty$ из (7) справедливо приближенное спектральное уравнение:

$$\kappa^2 \approx \frac{\rho}{E}\left[\omega^2 + 2\alpha\omega + \left(4\alpha^2 - E^2\eta - \xi^2\right)\right].$$

Это означает, что процесс затухания ультразвуковых волн в одномерном континууме (6) такой же, как процесс затухания волн в уравнении Бэйтмана.

Для экспериментальной аттестации предложенной математической модели необходимо также получить уравнения для «догрузочных» напряжений и при $\omega \to \infty$ сравнить оба спектральных уравнения.

Из второго уравнения системы (4) имеем:

$$\ddot{\text{э}}=\frac{1}{E}\ddot{\sigma}+f'_{\text{э}}\,\dot{\text{э}}=\frac{1}{E}\ddot{\sigma}+f'_{\text{э}}\left(\frac{\dot{\sigma}}{E}+f\right)+\dot{\sigma}f'_{\sigma}=\frac{1}{E}\ddot{\sigma}+\left(\frac{1}{E}f'_{\text{э}}+f'_{\sigma}\right)\dot{\sigma}+f'_{\text{э}}f$$

Линеаризуя это уравнение в окрестности состояния (э_0, σ_0),получим

$$\ddot{\text{э}}^*=\frac{1}{E}\ddot{\sigma}^*+\left(\frac{1}{E}f'_{\text{э}}+f'_{\sigma}\right)\dot{\sigma}^*+\left(f''_{\text{э}\sigma}f+f'_{\sigma}f'_{\text{э}}\right)\sigma^*+\left(f''_{\text{ээ}}f+f'^2_{\text{э}}\right)\text{э}^* \qquad (8)$$

С использованием обозначений соотношение (8) принимает следующий вид:

$$\ddot{\text{э}}^*-\gamma^{\text{э}}\,\text{э}^*=\frac{1}{E}\ddot{\sigma}^*+\frac{1}{E}2\alpha\dot{\sigma}^*+\frac{\xi^2}{E}\sigma^* \qquad (9)$$

Поскольку из третьего уравнения системы (4) следует соотношение: $\ddot{\text{э}}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}\Rightarrow \rho\,\ddot{\text{э}}=\sigma''_{xx}$, то далее получаем цепочку равенств: $\ddot{\text{э}}^*-\gamma^{\text{э}}\,\text{э}^*\equiv\left(p^2-\gamma^{\text{э}}\right)\text{э}^*$, $\rho\left(p^2-\gamma^{\text{э}}\right)\ddot{\text{э}}^*=\left(p^2-\gamma^{\text{э}}\right)\sigma''_{xx}$ и окончательно из (9) находим уравнение распространения догрузочных волн напряжений

$$\left(p^2-\gamma^{\text{э}}\right)\sigma''_{xx}=\rho p^2\left(\frac{1}{E}\ddot{\sigma}^*+\frac{2\alpha}{E}\dot{\sigma}^*+\frac{\xi^2}{E}\sigma^*\right) \qquad (10)$$

Анализируя уравнение (10) по Фурье $\sigma^*=A\,exp\left(\omega t+\kappa x\right)$, получаем спектральное уравнение:

$$\frac{\rho}{E}\omega^2\left(\omega^2+2\alpha\omega+\xi^2\right)=\left(\omega^2-\gamma^{\text{э}}\right)\kappa^2\Rightarrow\kappa^2=\frac{\rho\omega^2}{E}\left(\frac{\omega^2+2\alpha\omega+\xi^2}{\omega^2-\gamma^{\text{э}}}\right).$$

Выполняя тождественные преобразования спектрального уравнения, найдем, что:

$$\kappa^2=\frac{\rho}{E}\left(\omega^2+2\alpha\omega+\xi^2+\gamma^{\text{э}}\right)+\frac{2\alpha\rho\gamma^{\text{э}}\omega}{E(\omega^2-\gamma^{\text{э}})}+\frac{\rho\gamma^{\text{э}}}{E(\omega^2-\gamma^{\text{э}})}.$$

«Догрузочные» деформации:

$$\kappa^2=\frac{\rho}{E}\left(\omega^2+2\alpha\omega+4\alpha-E^2\eta-\xi^2\right)+\frac{C_1}{\omega^2-2\alpha\omega+\xi^2}+\frac{C_2}{\omega^2-2\alpha\omega+\xi^2}$$

«Догрузочные» напряжения:

$$\kappa^2=\frac{\rho}{E}\left(\omega^2+2\alpha\omega+\xi^2+\gamma^{\text{э}}\right)+\frac{2\alpha\rho\gamma^{\text{э}}\omega}{E(\omega^2-\gamma^{\text{э}})}+\frac{\rho\gamma^{\text{э}}}{E(\omega^2-\gamma^{\text{э}})}$$

Сравнение показывает, что для «догрузочных» волн каждого из двух рассмотренных типов в области высоких частот получается уравнение Бэйтмана:

$$\frac{\partial^2\sigma^*}{\partial t^2}+2\alpha\frac{\partial\sigma^*}{\partial t}+\beta^2\sigma^*=c^2\frac{\partial^2\sigma^*}{\partial x^2}.$$

Это видно из того, что при высоких частотах дисперсионные уравнения полученных уравнений и уравнений Бэйтмана совпадают.

В спектральном уравнении, соответствующем уравнению Бэйтмана:

$$\kappa^2=\frac{1}{c^2}\left(\omega^2+2\alpha\omega+\beta^2\right),$$

где α – коэффициент затухания волны.

Поэтому в уравнениях для «догрузочных» волн деформаций и напряжений переменная величина $\frac{\partial f}{\partial\,\text{э}}+E\frac{\partial f}{\partial\sigma}$, обозначенная ранее как 2α, также имеет смысл удвоенного коэффициента затухания волны. Это означает, что построенная математическая модель описывает процессы затухания ультразвука в пластически деформированных средах. Для количественного сравнения теоретических результаты с экспериментальными данными, необходимо провести все необходимые оценки параметров для конкретных материалов и процессов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Толстопятов С.Н. О связи затухания ультразвука с внутренним напряжением в образце. / НИИЭинформэнергомаш. М.-1987. Деп.в НИИЭинформэнергомаше 13.05.87г. № 391-эм87.

2. Koeler J. Imperfection in Nearly Perfect Crustals/ J/ Koeler // John Wiley and Sons. 1952. P. 197.

3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.

Tolstopyatov S.N., Golovanova E.V.

MATHEMATICAL MODELING OF THE ATTENUATION OF THE OSCILLATIONS IN POLYCRYSTALLINE SOLIDS

A mathematical model describing the process of propagation and attenuation of high-frequency (ultrasonic) waves of small amplitude in the elastic-plastic body. The possibility of Express-evaluation of one-dimensional stress-strain state by the method of ultrasound attenuation. The dependence of the magnitude of the decrement of damping high-frequency oscillations from current and residual strains in the uniaxial stress-strain state.

Key words: *mathematical model, ultrasound, attenuation, stress-deformirovannoe condition, strength properties, porosity, dislocations*.

Толстопятов Сергей Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедра высшей математики.
Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова
Адрес: Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, д. 46
E-mail: olga160@yandex.ru

Голованова Елена Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики и физики.
Белгородский государственный аграрный университет им. В.Я. Горина.
Адрес: Россия, 308503, п. Майский, ул. Вавилова, д. 1.
E-mail: golovanova711@mail.ru