

Клюев С. В., канд. техн. наук, доц., докторант,  
Хархардин А. Н., д-р техн. наук, проф.

Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова

## РАСЧЕТ ВЫСОКОПЛОТНОЙ УПАКОВКИ ЗЕРЕН МЕЛКОЗЕРНИСТОГО БЕТОНА

Klyuyev@yandex.ru

В статье рассмотрена методика высокоплотной упаковки зерен мелкозернистого бетона. Написана программа для ЭВМ позволяющая варьировать параметрами бетонной смеси.

**Ключевые слова:** высокоплотная упаковка, бимодальная упаковка, полидисперсные системы.

### Введение

Для одинаковых сфер в трех измерениях задача упаковки рассматривалась лишь эмпирическим – экспериментальным методом. Об эмпирических и теоретических результатах в этой области имеются сообщения в работах Дж. Бернала (1959), Дж. Бернала и Майзона (Bernal J.D. and Mason J., 1960), Бердийка (Boerdiyk A.H., 1952), Коксетера (Coxeter H.S.M., 1958), Хигути (Higuti U., 1961), Мацке (Matzke E.B., 1950), Соллона (Solomon H., 1966), Уайза (Wise M. E., 1952), Скотта (Scott J. D., 1962), Финни и Бернала (Finney J.L. and Bernal J.D., 1967) и др.

Так, в 1962 г. Дж. Скотт, определяя плотность случайной упаковки одинаковых стальных и свинцовых шариков в больших сферических бутылках, установил что

$$\eta_1 = 0,64 - 0,33 / \sqrt[3]{N};$$

$$\eta_1 = 0,60 - 0,37 / \sqrt[3]{N},$$

где  $N$  – число шариков в бутылках при утряске и при свободной (без утряски) засыпке.

Как видно из этих выражений, при  $N \rightarrow \infty$   $\eta_1 = 0,64$  и  $\eta_1 = 0,60$  соответственно при уплотнении их слоя и без уплотнения. Приведем наши результаты в этой области, учитывая наличие в случайной упаковке твердых сфер фрагментов с кубической укладкой, пустоты между ними будем заполнять шариками последовательно меньшего и соответствующего размера. Наибольший размер пустот здесь будет равен

$$d_2 = (\sqrt{3} - 1)d_1,$$

где,  $d_1$  – диаметр наибольших одинаковых сфер диаметром, равным 1. Тогда модуль прерывности в их последовательных размерах будет

$$M = d_1 / d_2 = 1 / (\sqrt{3} - 1).$$

Размер пустот либо сфер последовательно меньшего размера, заполняющих эти пустоты, будет равен

$$d_2 = d_1 / M = (\sqrt{3} - 1)d_1 = 0,732d_1;$$

$$d_3 = d_2 / M = (\sqrt{3} - 1)^2 d_1 = 0,536d_1;$$

$$d_4 = d_3 / M = (\sqrt{3} - 1)^3 d_1 = 0,392d_1;$$

$$d_n = (\sqrt{3} - 1)^{n-1} d_1.$$

### 1. Бимодальные упаковки и методика расчета высокоплотных зерновых составов

Бимодальные упаковки – это зернистые смеси, состоящие из двух фракций: наиболее крупной и мелкой. Плотность упаковки частиц в бимодальных упаковках увеличивается с уменьшением размера частиц мелкой фракции:

$$\sigma_2 = \eta_1 + (1 - \eta_1) \psi_{i,j}^{(m)},$$

где  $\psi_{i,j}^{(m)}$  – степень заполнения свободного объема в крупной фракции частицами мелкой;  $1 - \eta_1 = \varepsilon_1$  – свободный объем в слое крупной фракции, заполняемый мелкой фракцией [1].

Наибольшая плотность упаковки твердых сферических частиц в смеси определяется при  $m = 12$ , где  $m$  – класс системы:

$$\sigma_2 = 0,64976 + 0,35024 \cdot 0,649776 = 0,8773.$$

Плотность упаковки твердых сферических частиц в смеси, состоящей из двух фракций кварцевого песка и других зернистых материалов в сферических емкостях при  $\eta_1 = \eta_2 = 0,64$  будет равна

$$\sigma_2 = 0,64 + 0,36 \cdot 0,64 = 0,8707.$$

При наличии сил трения между частицами заклинивания и зацепления плотность их упаковки снижается, это снижение наблюдается и в бимодальных упаковках. Так, при  $m = 12, \eta_1 = \eta_2 = 0,634 - 0,600$  получим:

$$\sigma_2 = 0,634 + (1 - 0,634)0,634 = 0,866 ;$$

$$\sigma_2 = 0,60 + (1 - 0,60)0,60 = 0,840 .$$

В табл. 1 приведены выражения для степени заполнения  $\psi_{i,j}^{(m)}$  свободного объема в слое твердых сфер и абсолютные величины при  $\eta_1=0,64976$  в зависимости от класса  $m$  системы распределения и относительного размера частиц мелкой фракции.

Анализ результатов расчета по данным табл. 1 показывает, что с уменьшением плотности упаковки частиц крупной фракции степень заполнения ее свободного объема мелкими частицами возрастает [2, 3].

Таблица 1

**Степень заполнения свободного объема в слое крупных частиц в бимодальных упаковках частицами мелкой фракции в зависимости от класса системы  $m$  и ее относительного размера**

Класс системы $m$	<1	1	2	3	4	4,5	5
$\psi_{i,j}^{(m)}$	$\varepsilon_i^3 \eta_i^3$	$\varepsilon_i^2 \eta_i^3$	$\varepsilon_i^2 \eta_i^2$	$\varepsilon_i^2 \eta_i$	$\varepsilon_i^2$	$\varepsilon_i \eta_i^2$	$\varepsilon_i^{3/2}$
$\psi_{i,j}^{(m)}$	0,012	0,033	0,052	0,080	0,123	0,148	0,189
$d_n / d_1$	$\leq 0,73$	0,73	0,54	0,39	0,29	0,25	0,21
Класс системы $m$	6	7	8	9	10	11	12
$\psi_{i,j}^{(m)}$	$\varepsilon_i \eta_i$	$\varepsilon_i \eta_i^{3/2}$	$\varepsilon_i$	$\eta_i^2$	$\eta_i^{3/2}$	$1 - \eta_i^2$	$\eta_i$
$\psi_{i,j}^{(m)}$	0,297	0,290	0,35	0,422	0,524	0,578	0,65
$d_n / d_1$	0,15	0,11	0,08	0,06	0,04	0,03	0,02

Выражения  $\psi_{i,j}^{(m)}$  понадобятся далее для расчета высокоплотных гранулометрических полидисперсных смесей по числу в них бимодальных упаковок (двойных связей).

**2. Методика расчета гранулометрического состава полидисперсной смеси с высокоплотной упаковкой в ней зерен**

1. Расчет среднего размера зерен и количества каждой узкой фракции для получения высокоплотной смеси.

Расчет основан на установлении распределения зерен по среднему размеру каждой фракции, вводимой в будущую высокоплотную

смесь. Для этого предварительно выделяют наиболее крупную узкую фракцию заполнителя, например, для тяжелого бетона  $d_1 = 40...20$  мм, для мелкозернистого бетона  $d_1 = 10...5$  мм и определяют насыпную плотность при утряске или виброуплотнении, а далее рассчитывают плотность упаковки зерен:

$$\eta_n = \gamma_n / \rho,$$

где  $\gamma_n, \rho$  – насыпная и средняя плотность зерен данной фракции. Известно, что плотность упаковки зерен крупных фракций заполнителя, в зависимости от формы их зерен, колеблется в пределах  $\eta_1 = 0,60...0,56$ . Для расчета принимаем  $\eta_1 = 0,58$  и  $m = 3$ :

$$d_n / d_1 = (2,549 / 10)^{1/n-1} = \dots = 0,085; 0,037; 0,0164; 0,0072; 0,003...$$

Расчет заканчивают тогда, когда средний размер мелкой фракции  $d_n = (d_n / d_1) d_1$  мм =  $0,003 \cdot 28,3$  мм =  $0,09$  мм огра-

ничен размером, рекомендуемым для заполнителей бетонов, например  $d_n = 0,14...0,1$  мм. Тогда

размеры зерен каждой узкой фракции при  $d_1 = 40...20$  мм будут равны:

$$d_1 = 40...20; 9; 0,072; 0,003 = 40...20; 17,6...8,8; 7,72...3,86; 3,4...1,7; 1,48...0,74; 1,676...0,338; 0,128...0,064$$

где  $\eta_1 = 0,58; \eta_2 = 0,59; \eta_3 = 0,60; \eta_4 = 0,61; \eta_5 = 0,62; \eta_6 = 0,62; \eta_7 = 0,60$  – определяются экспериментально.

2. Далее ведут подбор каждой фракции зернистого материала на стандартных ситах и определяют плотность упаковки их зерен по насыпной плотности при уплотнении их слоя в емкостях больших размеров или при увлажнении

$$\eta_i = \gamma_i / \rho.$$

3. В расчете количества каждой узкой фракции для получения высокоплотной зернистой смеси применяют любую произвольную величину  $G_1$  массы наиболее крупной фракции, например 1 кг, 10 кг, 100 кг, или 100 мас. частей. Тогда количество каждой последующей мелкой фракции с учетом раздвижки зерен будет равно:

$$G_2 = \frac{100}{\gamma_1} \frac{\eta_2}{\eta_1}.$$

Просуммируем количество всех фракций, вводимых в смесь, и запишем это выражение в общем виде:

$$G_n = (1 - \beta_n) \frac{\eta_n}{\sigma_{n-1}} \sum_{i=1}^{n-1} G_i, \quad (1)$$

где  $\sigma_{n-1}$  – плотность упаковки зерен в смеси, состоящей из  $n - 1$  фракций;  $\eta_n$  – плотность упаковки зерен очередной узкой фракции,  $\eta_1 = \sigma_1; \beta_n$  – коэффициент раздвижки зерен в смеси, состоящей из  $n - 1$  фракций, зернами вводимой очередной мелкой фракции.

В простейшем случае выражения для  $\beta_n$  принимают вид:

$\beta_n = 1$  – для жестких зернистых смесей;  
 $\beta_n = \sigma_{n-1} / \eta_n$  – для подвижных зернистых смесей;  
 для умеренно-подвижных и увлажненных смесей

$$\beta_n = \left( \frac{\sigma_{n-1}}{\eta_n} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Выражение (1) с учетом одного из выражений для  $\beta_n$  будет иметь вид

$$G_n = (1 - \beta_n) \frac{\eta_n}{\sigma_{n-1}} \sum_{i=1}^{n-1} G_i \quad \text{при } \beta_n = 1. \quad (2)$$

При введении каждой очередной фракции в смесь, состоящей из  $n - 1$  фракций, экспериментально определяют плотность упаковки  $\sigma_{n-1}$  зерен в смеси для расчета количества каждой последующей фракции и плотности упаковки.

4. Расчет плотности упаковки зерен в смеси, состоящей из  $n - 1$  фракций.

В основу расчета заложен принцип бимодальных упаковок для каждого класса  $m$  прерывистости в размерах зерен смеси. Количество таких бимодальных связей будет равно  $n(n - 1)/2$ , где  $n$  – число фракций в смеси, в том числе и вводимой очередной фракции:

$$\sigma_n = \sigma_{n-1} + \frac{1 - \beta_n}{\beta_n} X_n, \quad (3)$$

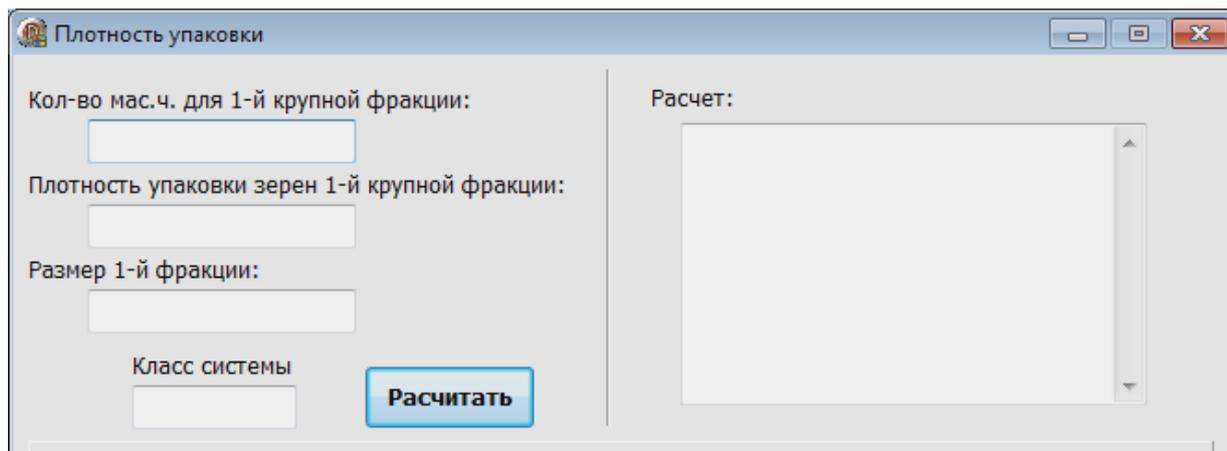
где  $X_n$  – степень заполнения свободного объема в зернистом слое при введении очередной фракции; определяется вероятностью распределения зерен в имеющихся пустотах между ними:

$$X_n = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \psi_{i,j}^m}{n(n-1)/2}. \quad (4)$$

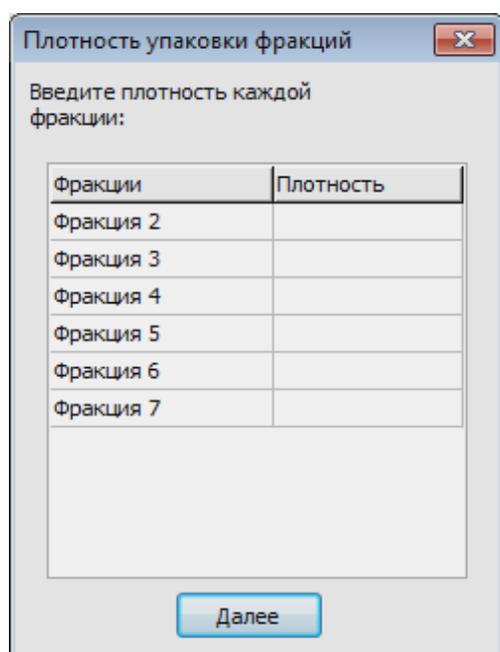
Значение  $\psi_{i,j}^m$  для бимодальных упаковок в зависимости от  $m$  и  $d_n/d_1$  приведены в табл. 1.

На основе разработанной методики расчета высокоплотной упаковки зерен мелкозернистого бетона написана компьютерная программа, позволяющая рационально подбирать состав будущей бетонной смеси. На рис. 1 представлены вид программы и результаты расчета.

а



б



в

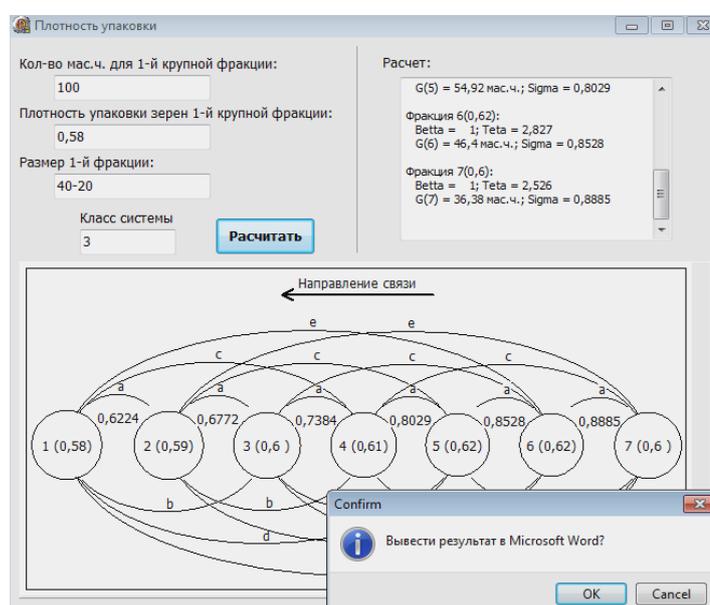


Рисунок 1. Программа расчета высокоплотной упаковки зерен мелкозернистого бетона:

- а – главное окно программы;
- б – ввод значений плотности отдельных фракций;
- в – результат работы

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лесовик, Р.В. Мелкозернистый сталефибробетон на основе техногенного песка для получения сборных элементов конструкций / Р.В. Лесовик, А.В. Клюев, С.В. Клюев // Научные исследования, наносистемы и ресурсосберегающие технологии в промышленности строительных материалов: сб. докл. Междунар. науч.-

практ. конф. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2010. – Ч.3. – С. 140 – 143.

2. Хархардин, А.Н. Структурная топология дисперсных систем: учеб. пособие / А. Н. Хархардин. – Белгород: Изд-во БГТУ, – 2007. – 128 с.

3. Хархардин, А.Н. Топологическое состояние и свойства композиционных материалов / А.Н. Хархардин // Изв. ВУЗов. Строительство. – Новосибирск, 1997. – №4. – С.72 – 77.