Воронов В. П., канд. физ.-мат. наук, проф.,
Семикопенко И. А., канд. техн. наук, доц.,
Вялых С. В., аспирант,
Гордеев С. И., аспирант
Белгородский государственный технологический университет им. В.Г.Шухова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ В МЕЛЬНИЦАХ ДЕЗИНТЕГРАТОРНОГО ТИПА

v.s_bogdanov@mail.ru

Используя метод малого параметра, предложено математическое описание поля скоростей частиц материала в мельницах дезинтеграторного типа. В рамках плоской модели получены аналитические выражения, определяющие в зависимости от технологических параметров скорость движения частиц материала в мельницах дезинтеграторного типа.

***Ключевые слова**: дезинтегратор, скорость, малый параметр, плоская модель.*

Решение ряда задач, связанных с определением поля скоростей во вращающемся потоке несущей среды, необходимо для правильного выбора как конструктивных, так и технологических параметров в мельницах дезинтеграторного типа. Кроме того, полученные при этом аналитические выражения, определяющие скорости движения частиц, позволяют определять траектории движения и произвести математическое моделирование плоского движения частиц во вращающейся двухфазной среде в зависимости от технологических параметров.

Для решения поставленной задачи обратимся к плоской детерминированной математической модели движения твердых сферических частиц, характеризующихся диаметром d, плотностью ρ, относительно небольшой скоростью движения $\vec{v}$ (для которой выполняется стоксовский закон сопротивления), во вращающемся с частотой ω_0 потоке воздушной среды, имеющей динамическую вязкость μ_0. В неподвижной полярной системе координат r, χ данная модель описывается следующей системой уравнений [1]:

$$\frac{dv_r}{dt} = \frac{v^2{}_\chi}{r} + \frac{1}{\tau}(u_r - v_r); \tag{1}$$

$$\frac{dv_\chi}{dt} = \frac{v_r v_\chi}{r} + \frac{1}{\tau}(u_\chi - v_\chi); \tag{2}$$

$$v_r = \frac{dr}{dt}; \tag{3}$$

$$v_\chi = r\frac{d\chi}{dt}, \tag{4}$$

где t – время движения частицы; u_r, u_χ, v_r, v_χ - радиальные и окружные скорости движения, соответственно воздушной несущей среды и частицы материала; τ – величина, имеющая размерность времени, которая определяется соотношением:

$$\tau = \frac{\rho d^2}{18\mu_0}. \tag{5}$$

В уравнениях (1)–(4) перейдем к безразмерным переменным согласно следующим соотношениям:

$$u_\tau = \omega_0 R\tilde{u}_{r1}; \tag{6}$$

$$u_\chi = \omega_0 R\tilde{u}_\chi; \tag{7}$$

$$v_r = \omega_0 R W_{r_1}; \tag{8}$$

$$v_\chi = \omega_0 R W_\chi; \tag{9}$$

$$t = \tau \cdot t_1; \tag{10}$$

$$r = Rr_1, \tag{11}$$

где R – расстояние от оси вращения ротора до первого внутреннего ряда ударных элементов дезинтегратора.

С учетом соотношений (6)-(11) система уравнений (1)-(4) приводится к следующему виду:

$$\frac{dW_{r_1}}{dt_1} = \alpha\frac{W^2{}_\chi}{r_1} + \tilde{u}_{r_1} - W_{r_1}; \tag{12}$$

$$\frac{dW_\chi}{dt_1} = -\alpha\frac{W_\chi W_{r_1}}{r_1} + \tilde{u}_\chi - W_\chi; \tag{13}$$

$$\frac{dr_1}{dt_1} = -\alpha W_{r_1}; \tag{14}$$

$$\alpha W_\chi = r_1\frac{d\chi}{dt_1}, \tag{15}$$

где безразмерная величина α определяется следующим соотношением:

$$\alpha = \omega_0\tau = \frac{\omega_0\rho d^2}{18\mu_0}. \tag{16}$$

Результат почленного деления (13) на $W\chi$ с учетом (14) позволяет привести (13) к следующему виду:

$$\frac{d}{dt_1}\left[\ln\left(W_\chi r_1\right)\right] = \frac{\tilde{u}_\chi}{W_\chi} - 1. \tag{17}$$

Общее решение дифференциального уравнения (17) имеет следующий вид:

$$W_\chi r_1 = const \cdot \exp(\int \left(\frac{\tilde{u}_\chi}{W_\chi} - 1 \right) dt_1. \quad (18)$$

Постоянную интегрирования, входящую в (18), можно определить из начальных условий:

$$W_\chi (r_1 = 1, t_1 = 0) = 1. \quad (19)$$

Из соотношения (18) следует, что если отсутствует окружная скорость воздушной среды $u_\chi = 0$,то, согласно (18) находим, что:

$$W_\chi = \frac{const\ e^{-t_1}}{r_1}. \quad (20)$$

Рассмотрим движение двухфазной среды в пространстве дезинтегратора после схода частицы материала с первого ряда ударных элементов, предположив при этом, что выполняются следующие соотношения:

$$\tilde{u}_{r_1} = 0;\ \tilde{u}_\chi = W_\chi. \quad (21)$$

В этом случае на основании (18) с учетом (19) находим, что:

$$\tilde{u}_\chi = W_\chi = \frac{1}{r_1}. \quad (22)$$

Уравнение (12) с учетом (14) и (22) принимает следующий вид:

$$W_{r_1} \cdot \frac{dW_{r_1}}{dr_1} + \frac{1}{\alpha} W_{r_1} = \frac{1}{r_1^3}. \quad (23)$$

Согласно результату работы [2], движение частиц материала вдоль поверхности плоского ударного элемента происходит со скоростью:

$$V = \omega_0 \rho_0 \frac{\cos\beta_0 - f \sin\beta_0}{2f}, \quad (24)$$

где β_0 – угол, образованный радиусом ρ_0 с направлением расположения плоского ударного элемента в точке соударения с частицей материала. Для рассматриваемого случая:

$$\beta_0 = 0;\ \rho_0 \approx R. \quad (25)$$

Поэтому на основании (24) и (25) получаем, что в момент схода частицы материала с плоского ударного элемента (r_1=1):

$$v_r \cong \frac{\omega_0 R}{2f};\ \text{или}\ W_{r_1} \cong \frac{1}{2f}. \quad (26)$$

Поэтому задача о нахождении радиальной составляющей скорости частицы материала после схода ее с плоского ударного элемента сводится к решению дифференциального уравнения (23) с начальным условием (26).

В силу нелинейности уравнения (23) данная задача Коши не имеет точного аналитического решения.

Использование ЭВМ позволяет найти приближенное решение численными методами, а также построить приближенное аналитическое решение в двух предельных случаях (α»1 и α«1).

Рассмотрим случай при α»1 , который реализуется при относительно больших диаметрах измельчаемых частиц. В данном случае решение уравнения (23) представляем в следующем виде:

$$W_{r_1} = W_{r_1}^{(0)} + \frac{1}{\alpha} W_r^{(1)}, \quad (27)$$

где функция $W_{r_1}^{(0)}$ удовлетворяет уравнению:

$$W_{r_1}^{(0)} \frac{dW_{r_1}^{(0)}}{dr_1} = \frac{1}{r_1^3}. \quad (28)$$

Решение уравнения (28), удовлетворяющее начальному условию (26), задается соотношением:

$$W_{r_1}^{(0)} = \sqrt{1 + \frac{1}{4f^2} - \frac{1}{r_1^2}}. \quad (29)$$

Искомая функция $W_{r_1}^{(1)}$ должна удовлетворять начальному условию:

$$W_{r_1}^{(1)}(r_1 = 1) = 0. \quad (30)$$

и с точностью до величин первого порядка малости относительно 1/α удовлетворять следующему дифференциальному уравнению:

$$W_{r_1}^{(0)} \cdot \frac{dW_{r_1}^{(0)}}{dr_1} + \frac{dW_{r_1}^{(0)}}{dr_1} \cdot W_{r_1}^{(1)} + W_{r_1}^{(0)} = 0. \quad (31)$$

Решение уравнения (31) с учетом (29) и (30) имеет вид:

$$W_{r_1}^{(1)} = r_1 \frac{\left(\left(\frac{1}{2f}\right) - \sqrt{r_1^2 + \frac{r_1^2}{4f^2} - 1} + arctg\frac{1}{2f} - arctg\frac{1}{\sqrt{r_1^2 + \frac{r_1^2}{4f^2 - 1}}} \right)}{\sqrt{r_1^2 + \frac{r_1^2}{4f^2} - 1}}. \quad (32)$$

Рассмотрим второй предельный случай, когда α«1.

Анализ нелинейного решения задачи Коши для этого случая показывает, что поведение производной $\frac{dW_{r_1}}{dr_1} \approx \frac{1}{\alpha}$, поэтому в этом случае получаем следующее с точностью до величины первого порядка малости по α уравнение:

$$W_{r_1}(\alpha\frac{dW_{r_1}}{dr_1}+1)=0.(33)$$

Решение уравнения (33), удовлетворяющее начальному условию (26), имеет вид:

$$W_{r_1}\cong\frac{1}{2f}-\frac{1}{\alpha}(r_1-1).$$

Окончательно решение уравнения (23), удовлетворяющее начальному условию (26), представляем в следующем виде:

$$W_{r_1}=\begin{cases}\sqrt{\left\{1+\frac{1}{4f^2}-\frac{1}{r_1^2}+\frac{r_1}{\alpha}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2f}-\sqrt{r_1^2+\frac{r_1^2}{4f^2}-1}+arctg\,2f-arctg\frac{1}{\sqrt{r_1^2+\frac{r_1^2}{4f^2}-1}}\right)}{\sqrt{r_1^2+\frac{r_1^2}{4f^2}-1}}\right.}\ \ при\,\alpha>>1\\ \frac{1}{2f}-\frac{1}{\alpha}\cdot(r_1-1)\,при\,\alpha<<1.\end{cases}$$

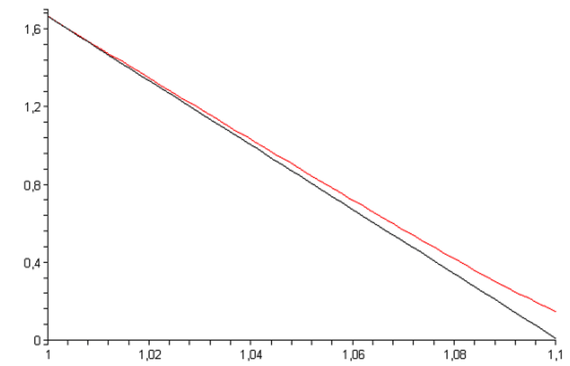

Рис. 1. График зависимости безразмерной радиальной составляющей скорости от безразмерной координаты r_1: при $\omega=50,\mu_0=1.84*10^{-6},\rho=1600$ верхняя линия соответствует численному решению, а нижняя линия - приближенному аналитическому решению в виде ряда $\alpha=0.06$.

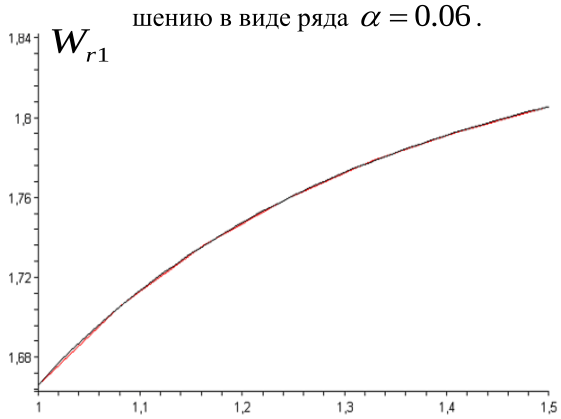

Рис. 2. График зависимости безразмерной радиальной составляющей скорости от безразмерной координаты r_1: при $\omega=50,\mu_0=1.84*10^{-6},\rho=1600$ верхняя линия соответствует численному решению, а нижняя линия - приближенному аналитическому решению в виде ряда $\alpha=24{,}55$.

На рисунке 1 приведена графическая зависимость величины (35), соответствующая значению α =0,06, а на рисунке 2 приведен график зависимости величины (35) при α =24,55.

Анализ приведенных на рисунках 1 и 2 графических зависимостей позволяет сделать вывод о достаточно высокой степени точности приближенного аналитического решения (35).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ушаков С.Г.,* Инерционная сепарация пыли /С. Г. Ушаков, Н.И Зверев – М. Энергия. 1974г. 168 с.

2.*Воронов В.П.,* Пневмомеханический смесительно-помольный комплекс./ В.П.Воронов, И.А. Семикопенко, П.П. Пензев // Известия вузов. Строительство –2008.— №10.— С. 91-95.