

DOI: 10.12737/22764

Рязанов М.А., аспирант,  
 Шишов И.И., канд. техн. наук, проф.,  
 Рощина С.И., д-р техн. наук, проф.,  
 Лукин М.В., канд. техн. наук, доц.

Владимирский государственный университет  
 имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых

## РАСЧЕТ ИЗГИБАЕМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

makc85@bk.ru

Предлагается алгоритм расчета железобетонных изгибаемых элементов с учетом физической нелинейности деформирования бетона и арматуры. Используются рекомендуемые российскими нормами трехлинейная диаграмма состояния бетона и двухлинейная – растянутой арматуры. Задача решается приближенным методом упругих решений. В каждом приближении используется метод конечных разностей, позволяющий определять жесткости балки индивидуально для каждой из точек  $j = 1, 2, \dots, n$ , нанесенных на балку с некоторым малым шагом. Предложен способ определения кривизны изогнутой оси балки, изгибающего момента, жесткости, а также напряжений в арматуре растянутой и сжатой зон, соответствующие любой деформации наиболее напряженного волокна бетона сжатой зоны от 0 до предельного значения  $\varepsilon_{b2}$ . Приводится решение для неразрезной трехпролетной балки.

**Ключевые слова:** нелинейность деформирования, деформации и перемещения, диаграммы состояния бетона и арматуры; жесткость и кривизна изогнутой оси изгибаемого элемента; деформации наиболее напряженного волокна бетона сжатой зоны, высота упругой, упруго-пластической и пластической зон.

Нелинейность деформирования составляющих железобетона приводит к тому, что жесткость элементов конструкций оказывается переменной и по длине и в зависимости от уровня напряженного состояния. Деформации и связанные с ними перемещения возрастают прогрессирующе и не только при увеличении нагрузки, но и с течением времени. Связанные с этим затруднения в исследовании деформирования заставляют быстро развиваться строительную механику железобетонных конструкций. Проблеме посвящены многие монографии, например [1–8], и научные статьи [9], [10].

Нормы [11] предписывают выполнять расчеты железобетонных конструкций по предельным состояниям первой и второй групп по напряжениям, усилиям, деформациям и перемещениям, определенным с учетом физической нелинейности (неупругих деформаций бетона и арматуры) и возможного образования трещин. Предлагается две диаграммы состояния сжатого бетона и две – растянутой арматуры. В работе [12] приводится сравнительный анализ результатов лабораторного исследования балок, рассчитанных по этим диаграммам, а также по европейскому [13] и международному [14] кодам. Для расчетов по предельным состояниям второй группы по российским нормам рекомендуется трехлинейная диаграмма состояния сжатого бетона.

В нашей работе предлагается алгоритм расчета изгибаемых элементов в соответствии с предпосылками, принятыми в СП [11]:

- гипотезой плоских сечений;
- трехлинейной диаграммой состояния бетона сжатой зоны (рис. 1);
- двухлинейной диаграммой состояния арматуры;
- учетом работы бетона растянутой зоны с помощью коэффициента  $\psi_s = 1 - 0,8 \frac{M_{crc}}{M}$ , где  $M_{crc}$  – момент образования трещин,  $M$  – момент от внешней нагрузки.

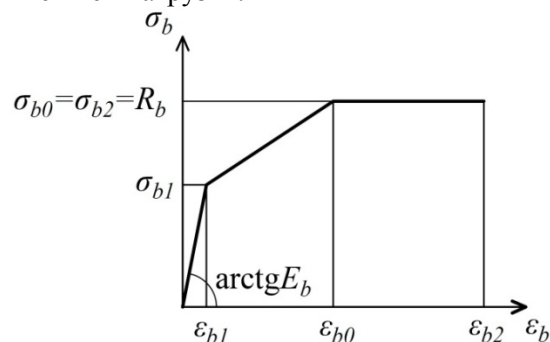


Рис. 1. Трехлинейная диаграмма состояния сжатого бетона

Момент  $M_{crc}$  определяется с учетом неупругих деформаций бетона растянутой зоны.

Жесткость элемента определяется по деформации наиболее напряженного волокна бетона сжатой зоны  $\varepsilon_b$ . Различаются два случая.

Случай 1:  $\varepsilon_{b1} \leq \varepsilon_b \leq \varepsilon_{b0}$ ,

$\varepsilon_{b1} = 0.6R_b/E_b$ ,  $\varepsilon_{b0} = 0.002$  – характерные параметры диаграммы состояния бетона;

$R_b$ ,  $E_b$  – расчетное сопротивление на сжатие и модуль упругости бетона.

На рисунке 2 показаны эпюры деформаций и напряжений в бетоне сжатой зоны высотой  $x$ .

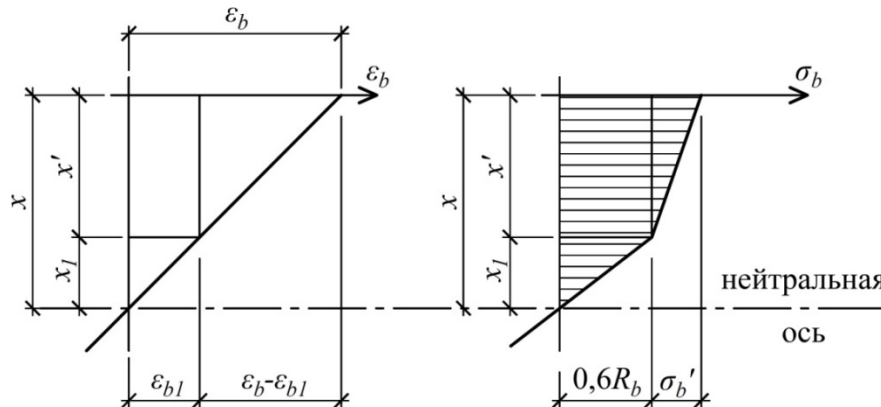


Рис. 2. Эпюры деформаций и напряжений в бетоне сжатой зоны при  $\varepsilon_{b1} \leq \varepsilon_b \leq \varepsilon_{b0}$

Для элемента прямоугольного поперечного сечения шириной  $b$  равнодействующая напряжений в бетоне сжатой зоны определится формулой:

$$N_b = bR_b[0.3p + (1 - p)(0.6 + 0.2q)]x \quad (2).$$

Усилия в арматуре сжатой и растянутой зон представятся в виде:

$$N'_s = E_s A'_s \varepsilon_b (x - a')/x;$$

$$N_s = E_s A_s / \psi_s \varepsilon_b (h_0 - x)/x \quad (3).$$

$A'_s$ ,  $A_s$  – сечение арматуры сжатой и растянутой зон соответственно;  $E_s A'_s$ ,  $E_s A_s / \psi_s$  – жесткость арматуры сжатой и растянутой зон;  $a'$ ,  $h_0$  – расстояние от центра арматуры сжатой зоны до кромки бетона и рабочая высота поперечного сечения элемента.

Из уравнения равновесия

$$N_b + N'_s - N_s = 0 \quad (4)$$

определяется высота сжатой зоны  $x$ , а затем кривизна изогнутой оси  $K = \varepsilon_b/x$ , напряжения в сжатой и растянутой арматуре, изгибающий момент  $M$  и жесткость элемента  $g = M/K$ .

При этом контролируется выполнение неравенств  $\sigma_s \leq R_s$  и  $\sigma'_s \leq R_{sc}$ .

$\sigma_s$ ,  $R_s$  и  $\sigma'_s$ ,  $R_{sc}$  – напряжения и расчетные сопротивления растянутой и сжатой арматуры.

При нарушении первого или второго неравенства принимается соответственно  $N_s = R_s A_s / \psi_s$  или  $N'_s = R_{sc} A'_s$ , и уравнение (4) решается заново.

$x_1$  – высота упругой зоны;  $x'$  – высота упруго-пластической зоны. Вводятся соотношения:

$$\varepsilon_{b1}/\varepsilon_b = p; \quad (\varepsilon_b - \varepsilon_{b1})/(\varepsilon_{b0} - \varepsilon_{b1}) = q \quad (1).$$

Тогда  $x_1 = px$ ;  $x' = (1 - p)x$ ;  $\sigma'_b = 0.4R_b q$ .

Случай 2:  $\varepsilon_{b0} \leq \varepsilon_b \leq \varepsilon_{b2}$ ,

$\varepsilon_{b2} = 0.0035$  – предельная деформация сжатого бетона.

На рисунке 3 показаны эпюры деформаций и напряжений для бетона сжатой зоны.

$x$  – высота сжатой зоны;  $x_1$ ,  $x'$ ,  $x''$  – высоты упругой, упруго-пластической и пластической зон соответственно. Вводятся соотношения:

$$\varepsilon_{b1}/\varepsilon_b = p; \quad (\varepsilon_{b0} - \varepsilon_{b1})/\varepsilon_b =$$

$$= q; \quad (\varepsilon_b - \varepsilon_{b0})/\varepsilon_b = r \quad (5).$$

Тогда  $x_1 = px$ ;  $x' = qx$ ;  $x'' = rx$ .

Для элемента прямоугольного поперечного сечения шириной  $b$  равнодействующая напряжений в бетоне сжатой зоны определится формулой:

$$N_b = bR_b(0.3p + 0.8q + r)x \quad (6).$$

Усилия в арматуре сжатой и растянутой зон определяются как в случае 1. Из уравнения (4) определяется высота сжатой зоны  $x$ , а затем, как и в случае 1, – кривизна изогнутой оси, напряжения в арматуре, изгибающий момент  $M$  и жесткость элемента  $g$ .

Задача решается методом конечных разностей [15]. В качестве основных неизвестных принимаются прогибы элемента в точках  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ , намеченных на элементе с малым шагом  $h$ . Для каждой точки  $j$  составляется уравнение равновесия участка стержня длиной  $h$ . Входящие в уравнение поперечные силы выражаются через изгибающие моменты, а моменты – че-

рез прогибы из основного дифференциального уравнения изогнутой оси стержня  $d^2v/dx^2 = -M/g$ . Представляя производную в конечно-разностной форме, для точки  $j$  получаем:

$$M_j = \frac{g_j(2v_j - v_{j-1} - v_{j+1})}{h^2} \quad (7),$$

где  $g_j$  – жесткость стержня в точке  $j$ ;  $v_j, v_{j-1}, v_{j+1}$  – прогибы в соответствующих точках.

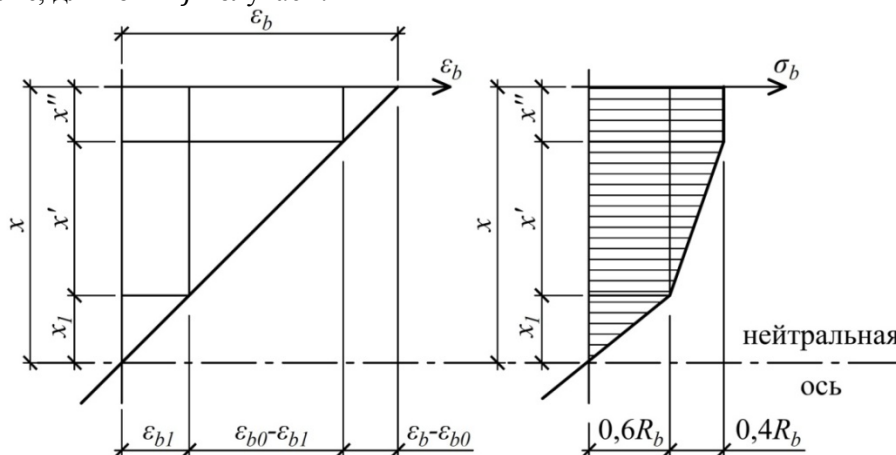


Рис. 3. Эпюры деформаций и напряжений в бетоне сжатой зоны при  $\epsilon_{b0} \leq \epsilon_b \leq \epsilon_{b2}$

При составлении уравнений для точек, примыкающих к концам стержня, используются статические или кинематические граничные условия, позволяющие выразить перемещения в законтурных точках (за пределами ряда  $j = 1, 2, \dots, n$ ) через перемещения в точках ряда. Из решения полученной системы определяются прогибы стержня в намеченных точках.

Железобетонный элемент деформируется физически нелинейно. Изгибная жесткость его с ростом уровня напряжений уменьшается, и в разных точках  $j$ , намеченных на его длине, оказывается разной. Задача решается методом упругих решений: выполняется ряд решений для упругого линейно деформируемого стержня, жесткости которого для каждого следующего решения вычисляются по результатам предыдущего на основе принятых предпосылок как это показано выше.

Для решения задачи в целом избран следующий алгоритм. Для стержня определяется момент образования трещин  $M_{cr}$  и соответствующие ему величины: деформация крайнего волокна бетона сжатой зоны  $\epsilon_b$ , кривизна изогнутой оси  $K$ , изгибная жесткость  $g$ . Принимается, что начальные жесткости стержня сохраняются неизменными до момента  $0.5M_{cr}$ , а в интервале  $0.5M_{cr} - M_{cr}$  жесткости, моменты, деформации  $\epsilon_b$  и кривизны  $K$  изменяются по линейному закону.

Вычисляются моменты, кривизны и жесткости для деформации крайнего волокна бетона сжатой зоны  $\epsilon_b = \epsilon_{b1}$  и принимается, что жесткости (а также моменты, деформации и кривизны) в интервале  $M_{cr} - \epsilon_{b1}$  изменяются по линейному закону.

Интервал  $\epsilon_{b1} - \epsilon_{b0} - \epsilon_{b2}$  делится на малые отрезки по  $\epsilon_b = 0.00001$ , и создается таблица значений моментов, деформаций, кривизн, жесткостей и напряжений в арматуре растянутой и сжатой зон. Получив в очередном решении кривизну в точке  $j$ , мы находим в таблице строчку и готовую жесткость для следующего решения. Это упрощает программирование и ускоряет решение задачи.

На рисунке 4 приводится поперечное сечение балки и графики изменения изгибающего момента, кривизны изогнутой оси и жесткости балки при изгибе ее в диапазоне деформации наиболее напряженного волокна бетона сжатой зоны от 0 до предельного значения  $\epsilon_{b2} = 0.0035$ . При  $\epsilon_b = 0.0018$  все линии имеют излом. Объясняется это тем, что напряжения в арматуре растянутой зоны достигают расчетного сопротивления  $R_s$  и перестают увеличиваться.

На рисунке 5 приводятся эпюры прогибов, изгибающих моментов и жесткостей неразрезной трехпролетной балки, сечение которой показано на рис. 4. Показанная внешняя нагрузка подобрана из расчета по предельному состоянию второй группы, как предельная по условию жесткости балки: максимальный прогиб 29.38 мм при предельно допустимом значении 30 мм.

Предельным по прочности принимается состояние, при котором или деформация наиболее напряженного волокна бетона сжатой зоны достигает предельной величины  $\epsilon_{b2} = 0.0035$ , или деформация растянутой арматуры – предельного значения  $\epsilon_{s2} = 0.025$ .

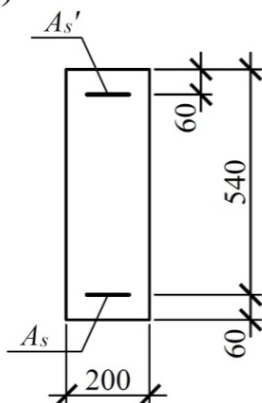
При этом принимаются расчетные характеристики материалов для предельных состояний первой группы. В нашем примере предельная

нагрузка определена деформациями бетона и составила 0.88 от предельной по жесткости.

Увеличение сечения арматуры сжатой зоны на 25 % повысило предельную по жесткости нагрузку на 18 %, причем критерием ее наступления стали предельные деформации бетона сжатой зоны (при максимальном прогибе 23.98 мм). Нагрузка, предельная по прочности, составила 0.9 от предельной по жесткости.

Уменьшение вдвое армирования растянутой и сжатой зон, показанного на рис. 4, уменьшает нагрузку, предельную по жесткости, на 45 %. (Критерием служит деформация бетона сжатой зоны; максимальный прогиб – 28.42 мм). Предельная по прочности нагрузка составила 0.89 от предельной по жесткости.

а)



Бетон В25:  $R_{b,n}=18,5\text{МПа}$ ;  $R_b=14,5\text{МПа}$ ;

$E_b=3 \cdot 10^4\text{МПа}$ .

Арматура А500:  $A_s=A_s'=0,001963\text{м}^2$  (4Ø25);

$R_{s,n}=500\text{МПа}$ ;  $R_s=435\text{МПа}$ .

Момент образования трещин:  $M_{cr}=0,0572\text{МН}\cdot\text{м}$ .

б)

Моменты  $M$ ,  $\text{МН}\cdot\text{м}$   
(Кривизны  $K$ )  
[Жесткость  $g$ ,  $\text{МН}\cdot\text{м}^2$ ]

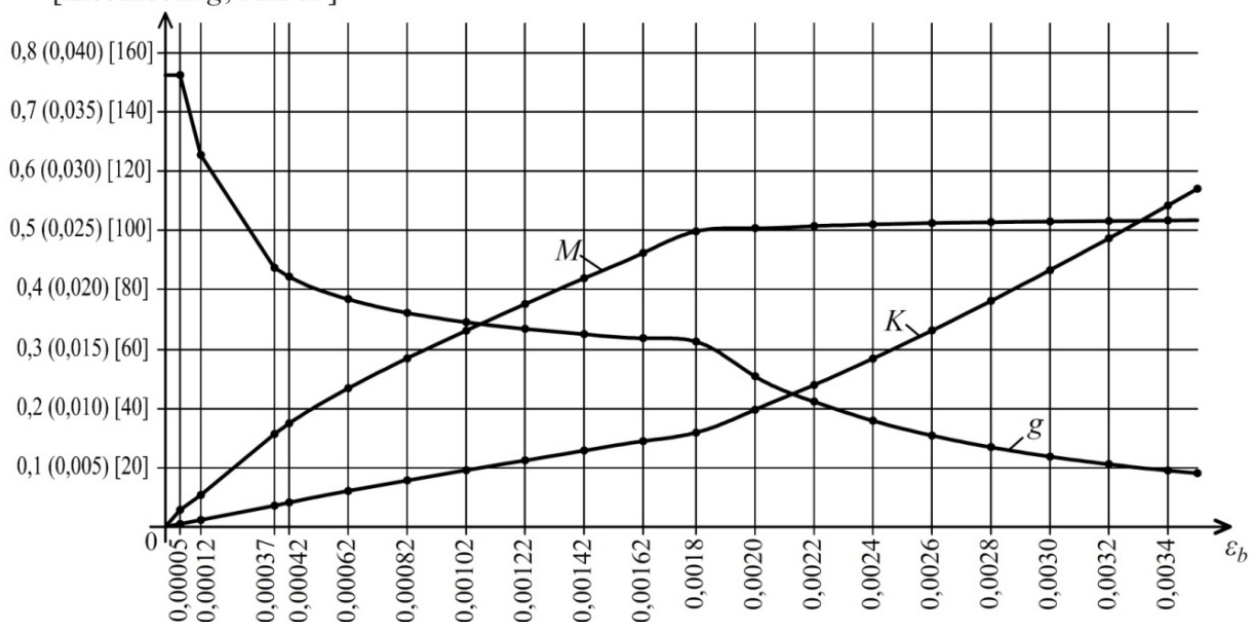


Рис. 4. Поперечное сечение балки (а) и зависимость изгибающего момента, кривизны изогнутой оси и жесткости от деформации наиболее напряженного волокна бетона сжатой зоны (б)

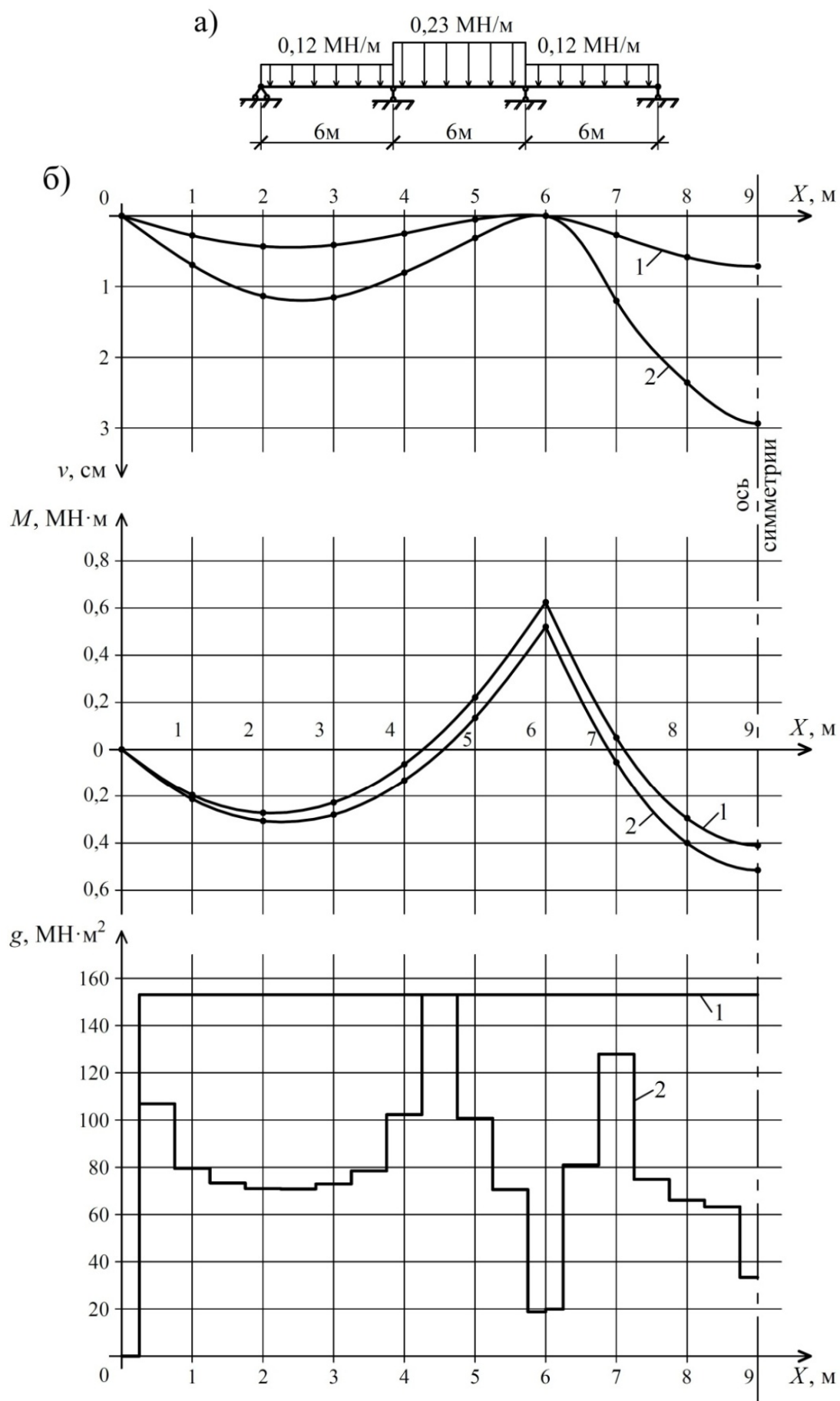


Рис. 5. Расчетная схема (а), эпюры прогибов, изгибающих моментов и жесткостей (б) неразрезной трехпролетной балки: 1 – по упругому расчету; 2 – с учетом нелинейности

Интересно отметить, что при существенно различном армировании соотношение между нагрузками, предельными по прочности и жесткости, остается почти одинаковым. Оно сохраняется также при изменении длины пролета: 0.88 при пролетах 4.0 м и 0.91 при пролетах 8.0 м.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. М.: Стройиздат, 1974. 316 с.
3. Бондаренко В.М. Инженерные методы нелинейной теории. М.: Стройиздат, 1982. 288 с.
4. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. М.: Стройиздат, 1996. 416 с.
5. Галустов К.З. Нелинейная теория ползучести бетона и расчет железобетонных конструкций. М.: Физматгиз, 2006. 248 с.
6. Карпенко С.Н. Модели деформирования железобетона в приращениях и методы расчета конструкций: Автореф. дис. д-р техн. наук. Москва, 2010. 48 с.
7. Кодыш Э.Н., Никитин И.К., Трекин Н.Н. Расчет железобетонных конструкций из тяжелого бетона по прочности, трещиностойкости и деформациям. М.: АСВ, 2010. 352 с.
8. Тамразян А.Г., Есяян С.Г. Механика ползучести бетона. М.: МГСУ, 2012. 524 с.
9. Гончаров Е.Е. Моделирование ползучести бетона в дифференциальной форме с использованием реологических моделей / Бетон и железобетон – взгляд в будущее: науч. труды III Всерос. (II Междунар.) конф. по бетону и железобетону // РАН, Мин-о строит. и жилищ. коммунал. хоз. РФ, РИА, Мин-о образ. и науки РФ, МГСУ, НИЦ "Строительство", Ассоциация "Железобетон". (Москва, 12 – 16 мая 2014 г.), Москва: Изд-во МГСУ, 2014. Т.1. С. 21–27.
10. Кодыш Э.Н., Трекин Н.Н., Трекин Д.Н. Влияние параметров идеализированных диаграмм деформирования бетона на расчетные значения прочности, трещиностойкости и деформаций изгибаемых и внецентренно сжатых элементов / Бетон и железобетон – взгляд в будущее: науч. труды III Всерос. (II Междунар.) конф. по бетону и железобетону // РАН, Мин-о строит. и жилищ. коммунал. хоз. РФ, РИА, Мин-о образ. и науки РФ, МГСУ, НИЦ "Строительство", Ассоциация "Железобетон". (Москва, 12 – 16 мая 2014 г.), Москва: Изд-во МГСУ, 2014. Т.1. С. 69–76.
11. Шишов И.И., Дживак Р.Н., Лапин А.В. Расчет стержневой системы с учетом возникающих деформаций // Бетон и железобетон. 2014. №1. С. 13–15.
12. Семенов Д.А. Влияние диаграммы бетона « $\sigma - \varepsilon$ » на результаты расчета нормального сечения железобетонного элемента по нелинейной деформационной модели // Бетон и железобетон. 2015. №3. С. 23–26.
13. EN 1992-1-1:2004. Eurocode 2: Design of concrete structures. Part 1-1: General rules and rules for buildings. Brussels. 2004. 225 p.
14. Fib Model Code for Concrete Structures, 2010. Ernst & Sohn. 2013. 434 p.
15. СП 63.13330.2012. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003 (утв. Приказом Минрегиона России от 29.12.2011 №635/8). М., 2012.

**Rjazanov M.A., Shishov I.I., Roshhina S.I., Lukin M.V.**

### CALCULATION OF THE BENDING ELEMENTS WITH ALLOWANCE FOR THE PHYSICAL NONLINEARITY OF THE STRAIN

*An algorithm of the reinforced binding elements calculation with allowance for the physical strain of concrete and reinforcement has been suggested. The three linear diagram of the concrete condition and the two linear of the tensile reinforcement that correspond to the recommended norms in Russia have been used. The task has been solved by the method of linear approximation. The finite difference method has been used at each approximation that allows to define the beam rigidity individually for each dot  $j = 1, 2$ , dotted on the beam with some small spacing. A method of determining the deflection curve bending, the bending moment, the rigidity as well as the compression areas of the reinforcement suitable for any deformation of the concrete most tensile fabric from 0 to limiting value  $\varepsilon_{b2}$  has been suggested. A solution for the continuous three-span beam has also been introduced.*

**Key words:** strain nonlinearity, strain and displacement, diagram of concrete and reinforcement condition, rigidity and bending of the deflection axis flexible member, deformation of the most tensile concrete fabric of the compression area, the height of the elastic, elastic-plastic and plastic areas.



**Рязанов Максим Александрович**, аспирант кафедры строительных конструкций.

Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.

Адрес: Россия, 600000, г. Владимир, ул. Горького, д. 87.

E-mail: make85@bk.ru

**Шишов Иван Иванович**, кандидат технических наук, профессор, доцент кафедры строительных конструкций.

Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.

Адрес: Россия, 600000, г. Владимир, ул. Горького, д. 87.

E-mail: shishov@shishov777.elcom.ru

**Рощина Светлана Ивановна**, доктор технических наук, профессор, заведующая кафедрой строительных конструкций.

Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.

Адрес: Россия, 600000, г. Владимир, ул. Горького, д. 87.

E-mail: rsi3@mail.ru

**Лукин Михаил Владимирович**, кандидат технических наук, доцент кафедры строительных конструкций.

Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.

Адрес: Россия, 600000, г. Владимир, ул. Горького, д. 87.

E-mail: lukin\_mihail\_22@mail.ru