Леденёва Т. М., д-р техн. наук, проф.,
Медведев С. Н., аспирант
Воронежский государственный университет

О НЕЧЁТКОЙ ЗАДАЧЕ О НАЗНАЧЕНИЯХ

dean@amm.vsu.ru

В работе рассматривается нечёткая задача о назначениях. Математически обосновано, что не имеет смысла постановка, в которой нечёткими треугольными числами являются и целевые коэффициенты, и переменные. Показано, что такая задача сводится к задаче о назначениях только с нечёткими коэффициентами. Для неё предложен алгоритм решения, основанный на переходе к интервальной постановке.

Ключевые слова: *задача о назначениях, треугольное нечёткое число, интервальная арифметика.*

Особым типом задач линейного программирования является задача о назначениях (ЗОН), которая широко используется в производственных и сервисных системах. В своей классической формулировке ЗОН редко встречается на практике. В связи с этим возникает необходимость в корректировке постановки задачи. Некоторые авторы [1, 2] рассматривают такое изменение, при котором целевые коэффициенты и переменные являются нечёткими треугольными числами. Покажем, что такой подход к ЗОН не имеет смысла, так как в итоге получается задача о назначениях только с нечёткими целевыми коэффициентами.

Рассмотрим треугольное нечёткое число $\tilde{A} = (a, b, c)$ с функцией принадлежности, заданной следующим образом

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-a)}{(b-a)}, a \le x \le b, \\ \dfrac{(c-x)}{(c-b)}, b \le x \le c, \\ 0, \text{иначе.} \end{cases} \qquad (1)$$

где $a, b, c \in R$.

Будем считать, что два треугольных нечётких числа $\tilde{A} = (a, b, c)$ и $\tilde{A}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ равны между собой, если $a = a_1, b = b_1, c = c_1$.

Для треугольного нечёткого числа $\tilde{A}$ с функцией принадлежности (1) α -срезом будет являться отрезок $[a + \alpha(b - a), c - \alpha(c - b)]$.

Введем в рассмотрение функцию дефаззификации, заданную следующим образом

$$Df(\tilde{A}) = \int_0^1 \frac{a + \alpha(b-a) + c - \alpha(c-b)}{2} d\alpha = \frac{a + 2b + c}{4}. \qquad (2)$$

Операции сложения и умножения двух треугольных нечётких чисел $\tilde{A}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ и $\tilde{A}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ зададим в виде

$$\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2),$$

$$\tilde{A}_1 \otimes \tilde{A}_2 = \begin{cases} (\min(a_1 a_2, c_1 a_2), b_1 b_2, \max(a_1 c_2, c_1 c_2)), \\ \quad \text{если } (a_1, b_1, c_1) \ge 0, \text{ тт.еесли } a_1 \ge 0, \\ (\min(a_1 c_2, c_1 c_2), b_1 b_2, \max(a_1 a_2, c_1 a_2)), \\ \quad \text{если } (a_1, b_1, c_1) \le 0, \text{ тт.еесли } c_1 \le 0, \\ (\min(a_1 c_2, c_1 c_2), b_1 b_2, \max(c_1 c_2, a_1 a_2)), \\ \quad \text{иначе, тт.еесли } a_1 \le 0 \le c_1. \end{cases}$$

Под min и max будем понимать следующее:

$$\min(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}\right) - \left|\frac{x-y}{2}\right|,$$

$$\max(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}\right) + \left|\frac{x-y}{2}\right|.$$

Перейдём к рассмотрению полной нечёткой задачи о назначениях [1], в которой переменные и целевые коэффициенты являются треугольными нечёткими числами. Её математическая модель имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{ij} \tilde{x}_{ij} \to \min \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_{ij} = \tilde{1}, \ j = \overline{1,n}, \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_{ij} = \tilde{1}, \ i = \overline{1,n}, \qquad (5)$$

$\tilde{x}_{ij}$ - неотрицательное треугольное нечёткое число,

$$i, j = \overline{1,n} \qquad (6)$$

где $\tilde{c}_{ij} = (\alpha_{ij}, c_{ij}, \beta_{ij})$, $\tilde{x}_{ij} = (y_{ij}, x_{ij}, z_{ij})$, $i, j = \overline{1,n}$, $\tilde{1} = (1,1,1)$.

Определение 1. Оптимальное решение задачи (3)-(6) есть треугольное нечёткое число $\tilde{x}_{ij}^*$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\tilde{x}_{ij}^*$ - неотрицательное нечёткое число;

2. $\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_{ij}^* = \tilde{1}, \ j = \overline{1,n}, \quad \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_{ij}^* = \tilde{1}, \ i = \overline{1,n};$

3. Если существует некоторое неотрицательное треугольное число $\tilde{x}'_{ij} \ne \tilde{x}_{ij}^*$, для которого выполняются условия

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}'_{ij}=\tilde{1},\quad j=\overline{1,n},$$

$$\sum_{j=1}^{n}\tilde{x}'_{ij}=\tilde{1},\quad i=\overline{1,n},$$

то $Df\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_{ij}\otimes\tilde{x}^{*}_{ij}\right)<Df\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_{ij}\otimes\tilde{x}'_{ij}\right)$, где Df – функция дефаззификации.

В силу определения оптимальности решения $\tilde{x}^{*}_{ij}$ задача (3)-(6) эквивалентно переписывается в виде

$$Df\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_{ij}\otimes\tilde{x}_{ij}\right)\to\min$$

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_{ij}=\tilde{1},\quad j=\overline{1,n},$$

$$\sum_{j=1}^{n}\tilde{x}_{ij}=\tilde{1},\quad i=\overline{1,n};$$

$\tilde{x}_{ij}$ - неотрицательное треугольное нечёткое число, $i,j=\overline{1,n}$.

Заметим, что в силу формул сложения и умножения треугольных нечётких чисел выражение

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_{ij}\otimes\tilde{x}_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\alpha_{ij},c_{ij},\beta_{ij})\otimes(y_{ij},x_{ij},z_{ij})$$

представляет собой также треугольное нечёткое число (α_0,c_0,β_0), где $\alpha_0=\alpha_0(y_{ij},z_{ij})$, $c_0=c_0(x_{ij})$, $\beta_0=\beta_0(y_{ij},z_{ij})$, $i,j=\overline{1,n}$. Кроме того,

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_{ij}=\left(\sum_{i=1}^{n}y_{ij},\sum_{i=1}^{n}x_{ij},\sum_{i=1}^{n}z_{ij}\right)\text{ и}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\tilde{x}_{ij}=\left(\sum_{j=1}^{n}y_{ij},\sum_{j=1}^{n}x_{ij},\sum_{j=1}^{n}z_{ij}\right),\quad i,j=\overline{1,n}.$$

В итоге задача переписывается следующим образом

$$Df(\alpha_0,c_0,\beta_0)\to\min$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}y_{ij},\sum_{i=1}^{n}x_{ij},\sum_{i=1}^{n}z_{ij}\right)=(1,1,1),\ j=\overline{1,n},$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n}y_{ij},\sum_{j=1}^{n}x_{ij},\sum_{j=1}^{n}z_{ij}\right)=(1,1,1),\ i=\overline{1,n},$$

$$x_{ij}-y_{ij},z_{ij}-x_{ij}\ge 0,\ \forall i,j=\overline{1,n},$$

$$y_{ij},x_{ij},z_{ij}\ge 0,\ \forall i,j=\overline{1,n}.$$

В силу формулы (2) данная задача преобразуется в задачу линейного программирования вида

$$\frac{1}{4}(\alpha_0+2c_0+\beta_0)\to\min \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n}y_{ij}=1,\ j=\overline{1,n}, \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{n}y_{ij}=1,\ i=\overline{1,n}, \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\ j=\overline{1,n}, \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\ i=\overline{1,n}, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{n}z_{ij}=1,\ j=\overline{1,n}, \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{n}z_{ij}=1,\ i=\overline{1,n}, \tag{13}$$

$$x_{ij}-y_{ij},z_{ij}-x_{ij}\ge 0,\ \forall i,j=\overline{1,n}, \tag{14}$$

$$y_{ij},x_{ij},z_{ij}\ge 0,\ \forall i,j=\overline{1,n}. \tag{15}$$

Ограничения (14) здесь возникают в силу определения треугольного нечёткого числа (1), где $a\le b\le c$.

Заметим, что для данной задачи известны алгоритмы решения, например, симплекс-метод.

Утверждение 1. Задача (7)-(15) преобразуется в задачу транспортного типа вида

$$\frac{1}{4}(\alpha_0+2c_0+\beta_0)\to\min \tag{16}$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\ j=\overline{1,n}, \tag{17}$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\ i=\overline{1,n}, \tag{18}$$

$$x_{ij}\ge 0,\ \forall i,j=\overline{1,n}, \tag{19}$$

где $\alpha_0=\alpha_0(x_{ij})$, $c_0=c_0(x_{ij})$, $\beta_0=\beta_0(x_{ij})$, , $i,j=\overline{1,n}$.

Доказательство.

Предположим, что $y^{*}_{ij},x^{*}_{ij},z^{*}_{ij},i,j=\overline{1,n}$ – оптимальное решение задачи (7)-(15).

Распишем одно из ограничений (8), например первое, следующим образом

$$\sum_{i=1}^{n}y^{*}_{i1}=\sum_{i:y^{*}_{i1}=0}y^{*}_{i1}+\sum_{i:y^{*}_{i1}\ne 0}y^{*}_{i1}=1$$

и рассмотрим соответствующее ему ограничение (10)

$$\sum_{i=1}^{n}x^{*}_{i1}=\sum_{i:y^{*}_{i1}=0}x^{*}_{i1}+\sum_{i:y^{*}_{i1}\ne 0}x^{*}_{i1}=1.$$

Из (14) следует, что $\sum_{i:y^{*}_{i1}\ne 0}x^{*}_{i1}\ge\sum_{i:y^{*}_{i1}\ne 0}y^{*}_{i1}=1.$

В силу (10) и (15) получаем, что $\sum_{i:y^{*}_{i1}=0}x^{*}_{i1}=0$ и $\sum_{i:y^{*}_{i1}\ne 0}x^{*}_{i1}=1.$

Если хотя бы одно из ограничений (14) выполняется как строгое, то

$$\sum_{i:y_{i1}^*\neq 0} x_{i1}^* > \sum_{i:y_{i1}^*\neq 0} y_{i1}^* = 1,$$

приходим к противоречию и, следовательно, $x_{i1}^* = y_{i1}^*,\ i=\overline{1,n}$.

В силу произвольности выбора номера j в ограничении (8) получаем, что $x_{ij}^* = y_{ij}^*$, $i,j=\overline{1,n}$.

Аналогичные рассуждения можно провести и относительно z_{ij}^*. Таким образом, все ограничения (14) выполняются на равенствах и $x_{ij}^* = y_{ij}^* = z_{ij}^*$, $i,j=\overline{1,n}$.

Утверждение доказано.

Транспортная задача (16)-(19) решается методом потенциалов. Из конструкции данного метода, очевидно, следует, что оптимальный ответ получается в булевых переменных. Таким образом, (16)-(19) сводится к стандартной задаче о назначениях.

По результатам проведённых рассуждений можно сделать следующие выводы:

1. В задаче (3)-(6) оптимальное решение $\tilde{x}_{ij}^* = (x_{ij}^*, x_{ij}^*, x_{ij}^*)$ является точным числом x_{ij}^*, $i,j=\overline{1,n}$.

2. Данные x_{ij}^*, $i,j=\overline{1,n}$ являются булевыми переменными.

3. Задача о назначениях (3)-(6) не имеет смысла и сводится к следующему виду

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_{ij}x_{ij} \to \min \tag{20}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j=\overline{1,n}, \tag{21}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i=\overline{1,n}, \tag{22}$$

$$x_{ij} = \{0,1\},\ \ i,j=\overline{1,n} \tag{23}$$

здесь $\tilde{\tilde{n}}_{ij}$ – нечёткие треугольные числа, $i,j=\overline{1,n}$.

Предложим один из способов решения данной задачи.

Заметим, что при заданном уровне α целевые коэффициенты $\tilde{c}_{ij}$ становятся интервалами $[\underline{c}_{ij}, \overline{c}_{ij}]_\alpha$, и нечёткая ЗОН преобразуется в интервальную задачу [3, 4]. В [3, 4] был рассмотрен один из видов целевой функции, при котором решение сводилось к минимизации затрат на левых границах интервалов

$$L_1(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underline{c}_{ij}x_{ij} \to \min. \tag{24}$$

Рассмотрим ещё две целевые функции: первая из них, $L_2(X)$, в оптимальное решение выбирает отрезки малой длины с большими значениями левой границы, вторая, $L_3(X)$, также ищет отрезки малой длины, но с малыми значениями левой границы.

$$L_2(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{l_{ij}}{\underline{c}_{ij}}x_{ij} \to \min,\ \underline{c}_{ij} \neq 0,\ i,j=\overline{1,n}, \tag{25}$$

$$L_3(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} l_{ij}\,\underline{c}_{ij}x_{ij} \to \min, \tag{26}$$

где $l_{ij} = \overline{c}_{ij} - \underline{c}_{ij}$ – длина отрезка $[\underline{c}_{ij}, \overline{c}_{ij}]_\alpha$.

Во всех трёх случаях интервальная ЗОН сводится к стандартной, для которой известны методы решения. Для этого в первом варианте интервалы в матрице затрат заменяются их левой границей, во втором – отношением длины промежутка к левой границе, а в третьем – их произведением. Заметим, что при $\alpha = 1$ критерии $L_2(X)$ и $L_3(X)$ теряют смысл из-за вырождения отрезка в точку.

Также рассмотрим суммарную целевую функцию, которая совмещает в себе три предыдущие

$$L_4(X) = L_1(X) + L_2(X) + L_3(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\underline{c}_{ij} + \frac{l_{ij}}{\underline{c}_{ij}} + l_{ij}\,\underline{c}_{ij}\right)x_{ij} \to \min \tag{27}$$

Заметим, что значения слагаемых сильно отличаются друг от друга. В связи с этим для равномерного учёта функций $L_1(X)$, $L_2(X)$, $L_3(X)$ введём нормировку целевых коэффициентов по следующей формуле

$$a_{ij} \to \frac{a_{ij} - a_{ij}^{\min}}{a_{ij}^{\max} - a_{ij}^{\min}}, \tag{28}$$

где $a_{ij}^{\min} = \min\limits_{i,j} a_{ij}$, $a_{ij}^{\max} = \max\limits_{i,j} a_{ij}$.

Так для $L_1(X)$ $a_{ij} = \underline{c}_{ij}$, для $L_2(X)$ $a_{ij} = \dfrac{l_{ij}}{\underline{c}_{ij}}$, для $L_3(X)$ $a_{ij} = l_{ij}\,\underline{c}_{ij}$.

Таким образом, получили четыре ЗОН с разными целевыми функциями, то есть при заданном уровне α имеем четыре различных решения. Заметим, что решение ЗОН есть матрица $X_{n\times n}$ с n независимыми единицами. Для каждого $x_{ij}=1$ поставим в соответствие степень значимости $d_{ij}=\alpha$, для остальных элементов – $d_{kl}=0$, где $(k,l): x_{kl}=0$. Итак, каждому из решений X_s ставится в соответствие матрица значимости D_s, $s=\overline{1,4}$, а для заданного α составляется уровневая матрица $D^a=\sum_{s=1}^{4} D_s$.

При разных α интервалы $[\underline{c_{ij}},\overline{c_{ij}}]_\alpha$ различаются, а, следовательно, изменяются значения коэффициентов в формулах (24)-(27), что ведёт к получению различных решений. В итоге каждому уровню соответствует своя матрица D^a.

Итак, алгоритм решения нечёткой ЗОН (20)-(23) содержит следующие этапы.

Этап 1. Задаётся множество уровней $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_K\}$. Для каждого α_k, $k=\overline{1,K}$ строится уровневая матрица D^{ak}.

Этап 2. Составляется итоговая матрица значимости $D=\sum_{k=1}^{K} D^{\alpha k}$.

Этап 3. Решается на максимум задача о назначениях с матрицей затрат *D*. В качестве алгоритма решения может быть взят венгерский метод. Ответ данной задачи и будет являться решением исходной задачи.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий работу алгоритма.

Задача. Решить нечёткую ЗОН с матрицей затрат $\tilde{\tilde{N}}=\begin{pmatrix}(1,4,10) & (2,5,9) & (1,4,6)\\ (3,6,9) & (2,4,10) & (1,5,7)\\ (2,4,6) & (1,4,8) & (2,3,4)\end{pmatrix}$.

Зададим три значения для α-уровней: $\alpha_1=0{,}75$, $\alpha_2=0{,}5$, $\alpha_3=0{,}25$ и для каждого из них построим уровневую матрицу.

Рассмотрим $\alpha_1=0{,}75$. Матрица $\tilde{\tilde{N}}$ преобразуется в интервальную матрицу $\tilde{N}^{[\,]}$

$$\tilde{N}^{[\,]}=\begin{pmatrix}[3,25;5,5] & [4,25;6] & [3,25;4,5]\\ [5,25;6,75] & [3,5;5,5] & [4;5,5]\\ [3,5;4,5] & [3,25;5] & [2,75;3,25]\end{pmatrix}.$$

Для функций L_1, L_2, L_3 и L_4 матрицы назначений будут иметь вид

$$C_1=\begin{pmatrix}3,25 & 4,25 & 3,25\\ 5,25 & 3,5 & 4\\ 3,5 & 3,25 & 2,75\end{pmatrix},\quad C_2=\begin{pmatrix}0,69 & 0,41 & 0,38\\ 0,29 & 0,57 & 0,38\\ 0,29 & 0,54 & 0,18\end{pmatrix},$$

$$C_3=\begin{pmatrix}7,31 & 7,44 & 4,06\\ 7,86 & 7 & 6\\ 3,5 & 5,69 & 1,38\end{pmatrix},\quad C_4=\begin{pmatrix}0,69 & 0,41 & 0,38\\ 0,29 & 0,57 & 0,38\\ 0,29 & 0,54 & 0,18\end{pmatrix}.$$

Тогда $X_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $X_3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $X_4=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ – решения четырёх задач соответственно. В результате уровневая матрица равна $D^{0.75}=\begin{pmatrix}0.75 & 1.5 & 0.75\\ 1.5 & 1.5 & 0\\ 0.75 & 0 & 2.25\end{pmatrix}$.

Аналогично вычисляются уровневые матрицы для $\alpha_2=0{,}5$, $\alpha_3=0{,}25$, они равны

$$D^{0.5}=\begin{pmatrix}0,5 & 0,5 & 1\\ 0,5 & 1,5 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad D^{0.25}=\begin{pmatrix}0,5 & 0,25 & 0,25\\ 0,25 & 0,5 & 0,25\\ 0,25 & 0,25 & 0,5\end{pmatrix}.$$

Далее составляется итоговая матрица $D=D^{0.75}+D^{0.5}+D^{0.25}=\begin{pmatrix}1,75 & 2,25 & 2\\ 2,25 & 3,5 & 0,25\\ 2 & 0,25 & 3,75\end{pmatrix}$, и с ней решается на максимум задача о назначениях. Полученное решение $X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ является ответом исходной задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Amit Kumar* Method for solving fully fuzzy assignment problems using triangular fuzzy numbers / Amit Kumar, Anila Gupta, Amarpreet Kaur // International Journal of Computer and Information Engineering. – 2009. – № 3. – С. 231-234.

2. *Dehghan M.* B. Hashemi, and M. Ghatee , Computational methods for solving fully fuzzy linear systems / M. Dehghan, B. Hashemi, M. Ghatee // Applied Mathematics and Computation. – 2006. – Том 179, № 1. – С. 328–343.

3. *Медведев С. Н.* Об устойчивости интервальной задачи о назначениях / С. Н. Медведев // Вестник Воронеж. инст. ФСИН России – Воронеж : Воронеж. инст. ФСИН России, 2011. – №1. – С. 37-41.

4. *Медведев С. Н.* Нахождение области устойчивости интервальной задачи о назначениях / С. Н. Медведев // Вестник Воронеж. гос. тех. ун-та. – Воронеж : Воронеж. гос. тех. ун-т., 2011. – Том 7, № 10. – С. 51-54.

5. *Аснина А. Я.* Вычислительные методы линейной оптимизации / А. Я. Аснина, Н. Б. Баева, Г. Д. Чернышова – Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж, 1987. – 156 с.