Ботвенко С. И., канд. техн. наук, доц.,
Огнёв И. А., канд. техн. наук, доц.
Иркутский государственный технический университет

ЧАСТНЫЙСЛУЧАЙТЕОРЕТИЧЕСКИХИССЛЕДОВАНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕРМИЧЕСКИХ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛАСТИНЕ*

bsll110@yandex.ru

Представлены результаты теоретических исследований объемного распределения остаточных напряжений в термически тонкой платине после закалки. В качестве исходной эпюрыпринято распределение остаточных напряжений по параболической зависимости. Установлено положение нулевой плоскости для пластины,относительно которойвыполняется условие статического равновесия остаточных напряжений.

Ключевые слова: *остаточные напряжения;заготовка; система координат; термическая обработка; пластина.*

Авторамиработы [1] представлены результаты теоретических исследований пространственного распределения термических остаточных напряжений в пластине,у которой размеры поперечного сечения – величины одного порядка, т.е. речь идет о термически толстой пластине (плите). Представляет научный интерес проведение подобных исследований для термически тонкой пластины.

Пространственное распределение термических (закалочных) остаточных напряжений в цилиндре, как и в работе [1], описывается параболоидом вращения.Уравнение исходного(образующего) параболоидав системе координат, принятой на рис. 1, имеет вид

$$\sigma^{o}_{zy} = \sigma_{П}\left(\frac{6}{D^2}y^2 - \frac{6}{D}y + \frac{6}{D^2}x^2 - \frac{6}{D}x + 1\right). \quad (1)$$

После упрощений

$$\frac{D^2}{6\sigma_{П}}\left(\sigma^{o}_{zy} + 2\sigma_{П}\right) = \left(y - \frac{D}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{D}{2}\right)^2. \quad (2)$$

Введем в уравнение (2) выраженияобобщенных координат, что значительно упрощает дальнейшую работу

$$\frac{D^2}{6\sigma_{П}} z^* = y^{*2} + x^{*2}, \quad (3)$$

где

$$z^* = \sigma^{o}_{zy} + 2\sigma_{П}, \; y^* = y - \frac{D}{2}, \; x^* = x - \frac{D}{2},$$

Отсечем от цилиндра четыре попарноравных сегмента таким образом, чтобыполучилась пластина с размерами поперечного сечения $a \times b$. Причем, толщина пластины – размер b, существенно (на порядок и более) отличается от размераa. Для этого случаяхарактерно не толькобольшое различие в размерах поперечного сечения пластины, но и то, что толщина пластины b меньше размера$2r$ (рис. 1).Учитывая начальную симметрию пластиныотносительно осей, в дальнейшем достаточно рассматривать только выделенную левую нижнюю четверть. Для исследуемой пластины найдем положение нулевой плоскости, отстоящей на расстоянииh_1 от начала координат, относительно которой будет выполняться условие статического равновесия

$$V_1 = V_2. \quad (4)$$

Выразим из соотношения (3)уравнение параболоида в обобщенных координатах

$$z^* = \frac{6\sigma_{П}}{D^2}\left(y^{*2} + x^{*2}\right). \quad (5)$$

Приравнивая координату z^* величине h_1

$$z^* = h_1, \quad (6)$$

получим уравнение сечения параболоида нулевой плоскостью

$$h_1 = \frac{6\sigma_{П}}{D^2}\left(y^{*2} + x^{*2}\right). \quad (7)$$

Из равенства

$$\left(y^{*2} + x^{*2}\right) = r^2. \quad (8)$$

Сучетом уравнения (7) значение величины r может быть найдено как

$$r = \sqrt{\frac{D^2}{6\sigma_{П}} h_1}. \quad (9)$$

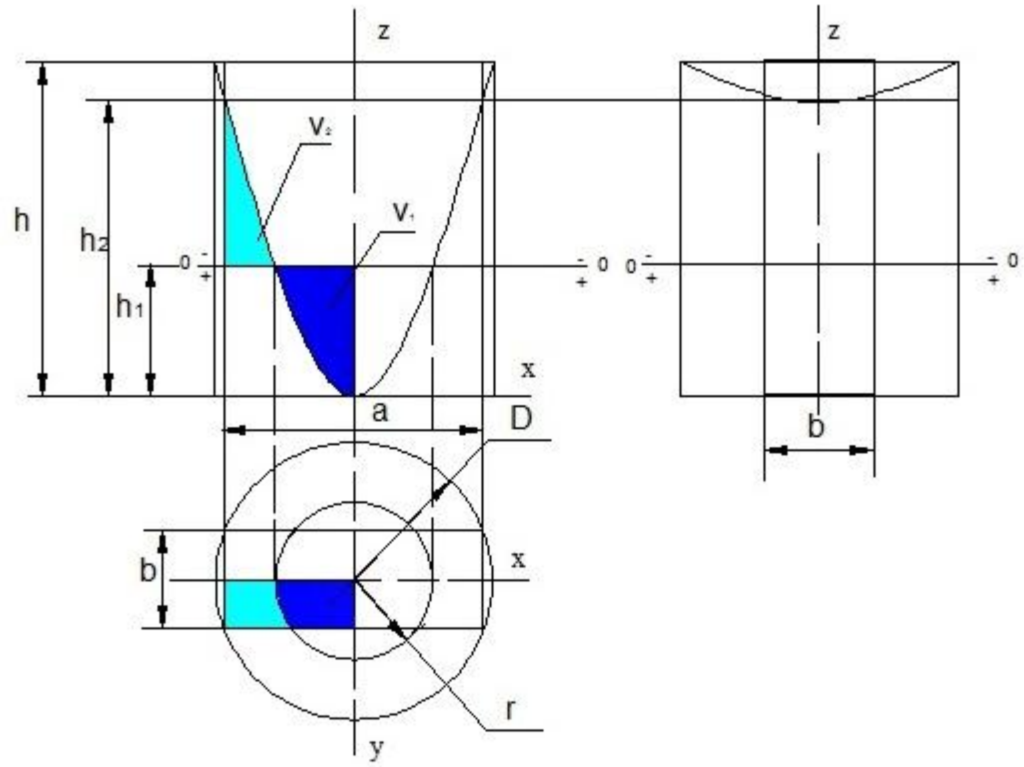

Рис. 1. Схема к расчету остаточных напряжений в термически тонкой пластине

Для вычисления объема V_1 проецируем область V_1 на плоскость XOY. Геометрически объем V_1 можно описать системой неравенств

$$\begin{aligned} &0 \le x \le \frac{b}{2}, \\ &0 \le y \le \sqrt{r^2 - x^2}, \\ &z^* \le z \le h_1. \end{aligned} \qquad (10)$$

Согласно [2,3] объем V_1 может быть найден с помощью двойного интеграла вида

$$V_1 = \int_0^{\frac{b}{2}} dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \left(h_1 - \frac{6\sigma_П}{D^2}(y^2 + x^2)\right) dy. \quad (11)$$

После решения внутреннего интеграла запишем

$$V_1 = \int_0^{\frac{b}{2}} \left(\left(h_1 - \frac{6\sigma_П}{D^2} y^2 \right) \sqrt{r^2 - y^2} - \frac{2\sigma_П}{D^2} \sqrt{r^2 - y^2} \right) dy \ . \qquad (12)$$

Чтобы избавиться от иррациональности при решении интеграла (12) используем тригонометрическую подстановку

$$y = r\sin t\,, r^2 - y^2 = r^2\cos^2 t\,, \sqrt{r^2 - y^2} = r\cos t, dy = r\cos t\,dt\,, \qquad (13)$$

$$при \quad y = 0, \quad t = 0\,; \quad при \quad y = \frac{b}{2}, \quad t = \arcsin\frac{b}{2r}\,.$$

После подстановки (13) в (12) получим

$$V_1 = \int_0^{\arcsin\frac{b}{2r}} \left(\left(h_1 - \frac{6\sigma_П}{D^2} r^2 \sin^2 t \right) r\cos t - \frac{2\sigma_П}{D^2} r^3 \cos^3 t \right) r\cos t\,dt\ , \qquad (14)$$

или после упрощений

$$V_1 = h_1 r \int_0^{\arcsin\frac{b}{2r}} \cos^2 t\,dt - \frac{6\sigma_П}{D^2} r^4 \int_0^{\arcsin\frac{b}{2r}} \sin^2 t\cos^2 t\,dt - \frac{2\sigma_П}{D^2} r^4 \int_0^{\arcsin\frac{b}{2r}} \cos^4 t\,dt\,. \qquad (15)$$

В уравнении (15) решаем каждый интеграл отдельно. Первый интеграл:

$$\int_0^{\arcsin\frac{b}{2r}} \cos^2 t\, dt = \int_0^{\arcsin\frac{b}{2r}} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\arcsin\frac{b}{2r}}, \quad (16)$$

или окончательно запишем

$$\int_0^{\arcsin\frac{b}{2r}} \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\arcsin\frac{b}{2r} + \frac{1}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{b}{2r}\right). \quad (17)$$

Второй интеграл:

$$\int_0^{\arcsin\frac{b}{2r}} \sin^2 t\cos^2 t\, dt = \frac{1}{4}\int_0^{\arcsin\frac{b}{2r}} 4\sin^2 t\cos^2 t\, dt = \frac{1}{4}\int_0^{\arcsin\frac{b}{2r}} \sin^2 2t\, dt, \quad (18)$$

или окончательно

$$\int_0^{\arcsin\frac{b}{2r}} \sin^2 t\cos^2 t\, dt = \frac{1}{8}\arcsin\frac{b}{2r} - \frac{1}{32}\sin\left(4\arcsin\frac{b}{2r}\right). \quad (19)$$

Третий интеграл:

$$\int_0^{\arcsin\frac{b}{2r}} \cos^4 t\, dt = \int_0^{\arcsin\frac{b}{2r}} (\cos^2 t)^2\, dt = \int_0^{\arcsin\frac{b}{2r}} \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt, \quad (20)$$

или окончательно запишем

$$\int_0^{\arcsin\frac{b}{2r}} \cos^4 t\, dt = \frac{3}{8}\arcsin\frac{b}{2r} + \frac{1}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{b}{2r}\right) + \frac{1}{64}\sin\left(\arcsin\frac{b}{2r}\right). \quad (21)$$

После подстановки (17), (19), (21) в уравнение (15) имеем

$$V_1 = h_1 r^2\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{b}{2r} + \frac{1}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{b}{2r}\right)\right) - \frac{6\sigma_П}{D^2} r^4\left(\frac{1}{8}\arcsin\frac{b}{2r} - \frac{1}{32}\sin\left(4\arcsin\frac{b}{2r}\right)\right)$$
$$- \frac{2\sigma_П}{D^2} r^4\left(\frac{3}{8}\arcsin\frac{b}{2r} + \frac{1}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{b}{2r}\right) + \frac{1}{64}\sin\left(\arcsin\frac{b}{2r}\right)\right). \quad (22)$$

Промежуточное решение имеет вид

$$V_1 = r^2\left(\frac{h_1}{2} - \frac{3\sigma_П}{2D^2}r^2\right)\arcsin\frac{b}{2r} + r^2\left(\frac{h_1}{4} - \frac{\sigma_П}{2D^2}r^2\right)\sin\left(2\arcsin\frac{b}{2r}\right) + r^4\frac{5\sigma_П}{32D^2}\sin\left(4\arcsin\frac{b}{2r}\right). \quad (23)$$

где: $r = \sqrt{\frac{D^2}{6\sigma}h_1}$.

Окончательно получим значение объема V_1

$$V_1 = \frac{D^2}{12\sigma_П}h_1^2\left[\frac{1}{2}\arcsin\frac{b}{2r} + \frac{1}{3}\sin\left(2\arcsin\frac{b}{2r}\right) + \frac{5}{96}\sin\left(4\arcsin\frac{b}{2r}\right)\right]. \quad (24)$$

В свою очередь, объем V_2 может быть найден при помощи интеграла

$$V_2 = \int_0^{\frac{b}{2}} dy \int_{\sqrt{r^2-y^2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{6\sigma_П}{D^2}(y^2+x^2) - h_1\right)dx. \quad (25)$$

Решение внутреннего интеграла позволяет получить уравнение

$$V_2 = \int_0^{\frac{b}{2}}\left[\left(\frac{6\sigma_П}{D^2}\left(y^2\frac{a}{2} + \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^3}{3}\right) - h_1\frac{a}{2} - \frac{6\sigma_П}{D^2}\left(y^2\sqrt{r^2-y^2} + \frac{\left(\sqrt{r^2-y^2}\right)^3}{3}\right) + h_1\sqrt{r^2-y^2}\right)\right]dy. \quad (26)$$

Разделив интеграл (26) на две части, обозначим первую как

$$\psi_1 = \int_0^{\frac{b}{2}} \Big(\frac{6\sigma_П}{D^2} \Big(y^2 \frac{a}{2} + \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^3}{3} \Big) - h_1 \frac{a}{2} \Big) \, dy . \qquad (27)$$

Решив интеграл (27) в соответствующих пределах, получим

$$\psi_1 = \frac{ab^3\,\sigma_П}{16D^2} + \frac{a^3\,b\sigma_П}{8D^2} - h_1\frac{ab}{4} . \qquad (28)$$

Второе слагаемое интегрального выражения(26) обозначим как

$$\psi_2 = \int_0^{\frac{b}{2}} \Big(\frac{6\sigma_П}{D^2} \Big(y^2\sqrt{r^2 - y^2} + \frac{\left(\sqrt{r^2-y^2}\right)^3}{3} \Big) - h_1\sqrt{r^2-y^2} \Big) \, dy . \qquad (29)$$

Решение интеграла (29) значительно упрощается с помощью тригонометрической подстановки вида

$$y = r\sin t, \quad \text{откуда}\, r^2 - y^2 = r^2 \cos^2 t, \text{или}\, \sqrt{r^2 - y^2} = r\cos t , \qquad (30)$$

$$dy = r\cos t\ dt , \qquad (31)$$

при следующих пределах интегрирования

$$y = 0, \qquad t = 0;$$

$$(32)$$

$$y = \frac{b}{2}, \qquad t = \arcsin\frac{b}{2r}$$

После подстановки (30), (31) в уравнение (29) с учетом пределов интегрирования (32) имеем

$$\psi_2 = \int_0^{\arcsin\frac{b}{2r}} \Big(\frac{6\sigma_П}{D^2} r^2 \sin^2 t + \frac{2\sigma_П}{D^2} r^2\cos^2 t - h_1 \Big)\, r^2\cos^2 t\ dt . \qquad (33)$$

В результате упрощений выражение (33) примет вид

$$\psi_2 = \frac{6\sigma_П}{D^2} r^4 \int_0^{\arcsin\frac{b}{2r}} \sin^2 t\cos^2 t\ dt + \frac{2\sigma_П}{D^2} r^4 \int_0^{\arcsin\frac{b}{2r}} \cos^4 t\ dt - h_1 r^2 \int_0^{\arcsin\frac{b}{2r}} \cos^2 t\ dt . \qquad (34)$$

Решение отдельных интегралов уравнения (34) позволяет окончательно получить:

$$\int_0^{\arcsin\frac{b}{2r}} \sin^2 t\cos^2 t\ dt = \frac{1}{8}\arcsin\frac{b}{2r} - \frac{1}{32}\sin\left(4\arcsin\frac{b}{2r}\right), \qquad (35)$$

$$\int_0^{\arcsin\frac{b}{2r}} \cos^4 t\ dt = \frac{3}{8}\arcsin\frac{b}{2r} + \frac{1}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{b}{2r}\right) + \frac{1}{64}\sin\left(4\arcsin\frac{b}{2r}\right), \qquad (36)$$

$$\int_0^{\arcsin\frac{b}{2r}} \cos^2 t\ dt = \frac{1}{2}\arcsin\frac{b}{2r} + \frac{1}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{b}{2r}\right). \qquad (37)$$

Подставив полученные результаты (35), (36), (37) в исходное уравнение (34), запишем

$$\psi_2 = \frac{6\sigma_П}{D^2} r^4 \Big(\frac{1}{8}\arcsin\frac{b}{2r} - \frac{1}{32}\sin\left(4\arcsin\frac{b}{2r}\right) \Big) + \frac{2\sigma_П}{D^2} r^4 \Big(\frac{3}{8}\arcsin\frac{b}{2r} + \frac{1}{4}\sin \times$$

$$\times \left(2\arcsin\frac{b}{2r}\right) + \frac{1}{64}\sin\left(4\arcsin\frac{b}{2r}\right) \Big) - h_1 r^2 \Big(\frac{1}{2}\arcsin\frac{b}{2r} + \frac{1}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{b}{2r}\right) \Big) \qquad (38)$$

После упрощений имеем

$$\psi_2 = \frac{r^2}{2}\left[\Big(\frac{3\sigma_П}{D^2} r^2 - h_1 \Big) \arcsin\frac{b}{2r} + \Big(\frac{\sigma_П}{D^2} r^2 - \frac{h_1}{2} \Big) \sin\left(2\arcsin\frac{b}{2r}\right) - \frac{5\sigma_П}{16D^2} r^2 \sin\Big(4\arcsin\frac{b}{2r}\Big) \right], \qquad (39)$$

Подставив в выражение (39) вместо величины r ее значение (9), окончательно запишем

$$\psi_2 = \frac{D^2}{12\,\sigma_П} h_1^2 \left[-\frac{1}{2}\arcsin\frac{b}{2r} - \frac{1}{3}\sin\,(2\arcsin\frac{b}{2r}) - \frac{5}{96}\sin\,(2\arcsin\frac{b}{2r}) \right]. \qquad 40)$$

Согласно уравнению(26),величина объема V_2 определяется по уравнению

$$V_2 = \psi_1 - \psi_2\,. \qquad (41)$$

Подставляя в уравнение (41) значениясоответствующих величин (28) и (40), получим

$$V_2 = \frac{a b^3 \sigma_П}{16D^2} + \frac{a^3 b \sigma_П}{8D^2} - h_1 \frac{ab}{4} +$$

$$+ \frac{D^2}{12\,\sigma_П} h_1^2 \left[\frac{1}{2}\arcsin\frac{b}{2r} + \frac{1}{3}\sin\,(2\arcsin\frac{b}{2r}) + \frac{5}{96}\sin\,(2\arcsin\frac{b}{2r}) \right]. \qquad (42)$$

Приравнивая значения, полученные для определения объемов V_1 и V_2,согласно уравнения (4), запишем

$$\frac{D^2}{12\sigma_П} h_1^2 \left[\frac{1}{2}\arcsin\frac{b}{2r} + \frac{1}{3}\sin\left(2\arcsin\frac{b}{2r}\right) + \frac{5}{96}\sin\left(4\arcsin\frac{b}{2r}\right) \right] = \frac{a b^3 \sigma_П}{16D^2} + \frac{a^3 b \sigma_П}{8D^2} - h_1 \frac{ab}{4} +$$

$$+ \frac{D^2}{12\,\sigma_П} h_1^2 \left[\frac{1}{2}\arcsin\frac{b}{2r} + \frac{1}{3}\sin\,(2\arcsin\frac{b}{2r}) + \frac{5}{96}\sin\,(2\arcsin\frac{b}{2r}) \right]. \qquad (43)$$

После упрощения выражения (43) имеем

$$h_1 = \frac{\sigma_П}{2\,D^2}\left(\frac{b^2}{2} + a^2\right), \qquad (44)$$

или окончательно

$$h_1 = \frac{\sigma_П}{4}\left(1 + \frac{a^2}{D^2}\right), \qquad (45)$$

где: $D^2 = a^2 + b^2$.

Таким образом, определено положение нулевой плоскости, относительно которой соблюдается условие статического равновесия объемов в области растягивающих и сжимающих остаточных напряжений для рассматриваемой пластины.

Следует обратить внимание на два момента. Первый. Если сопоставить конечноеуравнение для определения величины h_1 , т.е. величины, определяющейположения нулевой плоскости относительно начала системы координат, представленное в работе [1] для термически толстойпластины (плиты), с аналогичной величиной,согласно уравнения (45), то нетрудно заметить разницу, хотя исследования проводятся для призматического тела (пластины) и в том и в другом случае. Второй. При рассмотрении третьей проекции пластины (рис.1), эпюра остаточных напряжений на узкой грани пластиныдостаточно близко располагается к прямой линии, практически сливаясь с ней. При этом на поверхности широкой грани пластины, согласно геометрическимпостроениям, появляются растягивающие остаточные напряжения, что противоречит теории процесса закалки, согласно которой на поверхности закаливаемых тел всегда наводятся только сжимающие остаточные напряжения.По мнению авторов, оба этих момента можно объяснить тем, что привыполнении условия $2r \geq b$, или $r \geq \frac{b}{2}$,мы имеем термически тонкую пластину со сквознойпрокаливаемостью, где не наводятся остаточные напряжения либо они близки к нулю.

**Представленная в рамках данной статьиработа проводится при финансовой поддержке Правительства Российской Федерации (Минобрнауки России) по комплексному проекту 2012-218-03-120 «Автоматизация и повышение эффективности процессов изготовления и подготовки производства изделий авиатехники нового поколения» на базе Научно Производственной Корпорации «Иркут» с научным сопровождением Иркутского Государственного Технического Университета по постановлению Правительства РФ № 218 от 09.04.2010г.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ботвенко С.И., Огнев И.А.Теоретические исследования пространственного распределения термических остаточных напряжений в телах призматической формы. // ВестникИрГТУ, №12 (71), 2012. С. 177-187.

2. Бронштейн И.Н.,Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит., 1986. 544 с.

3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3 т. Т.1, Высш. шк. 1988. 712 с.